

УДК 550.3

**ТЕРМОКОНВЕКТИВНАЯ ТЕОРИЯ
ПРОИСХОЖДЕНИЯ ОСАДОЧНЫХ БАСЕЙНОВ.
РОЛЬ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ РЕЛЬЕФА
ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И СКАЧКА ПЛОТНОСТИ
НА ГРАНИЦЕ МОХО**

Б.И. Биргер

Объединенный институт физики Земли Российской академии наук, Москва

Для течений, связанных с малыми деформациями, реология горных пород описывается линейным интегральным (имеющим память) законом, который сводится к закону Андраде в случае постоянных напряжений. Континентальная литосфера при такой реологии обладает колебательной неустойчивостью. Термоконвективные волны, которые распространяются в литосфере с минимальным затуханием, имеют период около 200 млн лет и длину волны порядка 400 км. Начальные возмущения рельефа земной поверхности возбуждают амплитудно-модулированные термоконвективные волны (волновые пакеты). Рассматривается континентальный кратон, расположенный между орогенными поясами. Пакеты термоконвективных волн, возбуждаемые значительными возмущениями рельефа в орогенных поясах, распространяются внутрь кратона, встречаются в его центральной части и образуют зону термоконвективных колебаний (стоячих волн) в литосфере. Термоконвективные колебания в литосфере вызывают колебания земной поверхности, сопровождаемые седиментацией и эрозией, и могут рассматриваться как механизм распределения осадков на континентальном кратоне. Над зоной колебаний, которая представляет собой систему конвективных ячеек в литосфере, формируются осадочные бассейны. Учет скачка плотности на границе Мохо приводит начальные возмущения рельефа, необходимые для образования осадочных бассейнов, к разумным значениям порядка нескольких километров.

**THERMOCONVECTIVE THEORY
FOR THE ORIGIN OF SEDIMENTARY BASINS.
ROLE OF INITIAL PERTURBATIONS
OF THE EARTH'S SURFACE RELIEF
AND DENSITY CONTRAST ACROSS THE MOHO**

B.I. Birger

United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow

For flows associated with small strains, rheology of rocks is described by the linear integral (having a memory) law which reduces to the Andrade law in the case of constant stress. The continental lithosphere with such a rheology is overstable. Thermoconvective waves which propagate through the lithosphere with minimal attenuation have a period of about 200 Ma and a wavelength of the order of 400 km. Initial relief perturbations excite amplitude-modulated thermoconvective waves (wave packets). A continental craton

situated between orogenic belts is considered. The packets of thermoconvective waves, excited by the large relief perturbations in the orogenic belts, propagate inwards the craton. The running wave packets meet in the central part of craton and form the oscillations (standing waves) zone. Thermoconvective waves induce oscillations of the Earth's surface, accompanied by sedimentation and erosion, and can be considered as a mechanism for distribution of sediments on continental cratons. Over the oscillations zone, which is a system of convective cells in the lithosphere, sedimentary basins are formed. Taking into account the density jump on the Moho, the initial relief perturbations, necessary for the sedimentary basins formation, reduce to the reasonable values of the order of several kilometers.

Введение

Данные сейсмической стратиграфии и результаты бурения осадочной толщи в регионах осадочных бассейнов выявили глобальные циклы изменения относительного уровня моря. Продолжительность этих циклов составляет 200–300 млн лет (циклы первого порядка, или мегациклы), 10–80 млн лет (циклы второго порядка) и 1–10 млн лет (циклы третьего порядка). Однако до сих пор неясно, вызваны циклические изменения относительного уровня моря эвстатическим фактором (глобальное изменение уровня моря за счет изменения объема воды в Мировом океане) или тектоническим фактором (локальное изменение относительного уровня моря за счет вертикального движения земной коры в регионе бассейна). Если определяющим является эвстатический фактор [1, 2], то для бассейнов, расположенных на разных континентах, колебательные движения земной поверхности относительно уровня моря должны быть синхронны в пределах геохронологического разрешения. Между тем, нет явной корреляции периодов быстрого и медленного накопления осадков в разных бассейнах [3]. Более того, амплитуды эвстатических колебаний оказываются слишком малыми для того, чтобы объяснить стратиграфию осадочных бассейнов на кратонах [4, 5]. Слосс [6] считает, что только отсутствие более пригодного объяснения сделало популярным объяснение колебательной составляющей осадконакопления за счет эвстатических колебаний, которые он рассматривает как второстепенный фактор в эволюции осадочных бассейнов. В настоящем исследовании эволюция осадочных бассейнов объясняется термомонконвективными колебаниями литосферы, а эвстатический фактор не учитывается. Другие механизмы тектонических движений в регионах бассейнов рассмотрены в обзорах [3, 7].

Реологическая модель литосферы, термомонконвективные волны и колебания, их физическая природа и геологические приложения обсуждались в двух предыдущих статьях автора [8, 9]. Эти вопросы будут затронуты здесь только кратко, а за подробностями читатель будет отсылаться к упомянутым двум статьям.

В первой из них [8] предложена новая нелинейная реологическая модель, имеющая память. Эта модель согласуется как с теорией простых

жидкостей с затухающей памятью, так и с лабораторными исследованиями ползучести горных пород. Предлагаемая модель сводится к модели степенной неньютоновской жидкости в случае стационарного течения и к линейной интегральной модели с памятью для течений, вызывающих малые деформации. Эта линейная интегральная модель названа моделью Андраде, поскольку в случае постоянных напряжений она приводит к закону Андраде, который описывает неустановившуюся ползучесть. Стационарная конвекция под континентами формирует пограничный слой (континентальную литосферу), где перепад температуры между горячей нижней и холодной верхней поверхностями составляет около 1000 К. При анализе устойчивости этого слоя должна применяться модель Андраде.

Данный анализ показывает, что континентальная литосфера имеет колебательную неустойчивость. Период термоконвективных колебаний – около 200 млн лет, а длина волны – порядка 400 км. Термоконвективные колебания континентальной литосферы вызывают колебания земной поверхности, опуская одни регионы и поднимая другие. Когда регион будущего бассейна опускается ниже уровня моря и заполняется водой в течение полупериода колебаний, осадки накапливаются. В течение следующего полупериода поверхность бассейна поднимается выше уровня моря, но эрозия снимает только малую часть осадков, накопленных за предыдущий полупериод, поскольку скорость эрозии значительно ниже, чем скорость седиментации. Полудлина волны – того же порядка, что и типичный размер бассейна, а период термоконвективных колебаний – того же порядка, что и длительность мегацикла в осадконакоплении. Поэтому термоконвективные колебания можно рассматривать как механизм образования и эволюции осадочных бассейнов на континентальных кратонах. Зависимость толщины осадков от времени, следующая из термоконвективной теории эволюции осадочных бассейнов, соответствует наблюдаемому соотношению между глубиной залегания и возрастом осадков Уиллистонского бассейна.

Во второй статье [9] изучается возбуждение термоконвективных волн начальными возмущениями температуры в литосфере. Интерференция волн, распространяющихся в противоположных направлениях, приводит к образованию термоконвективных колебаний (стоячих волн). Предполагается, что развитие основных геологических структур на кратоне определяется термоконвективными волнами в литосфере. Эволюция бассейнов, расположенных в центральной части кратона, связана с термоконвективными колебаниями, а эволюция периферических бассейнов связана с термоконвективными волнами. Рассмотрены начальные возмущения, сконцентрированные в различных трехмерных обла-

стях с простой геометрией. Асимптотические решения, справедливые на больших временах, прошедших с момента появления возмущения, найдены в виде волновых пакетов (амплитудно-модулированные волны). Такая волновая структура характерна для любых диспергирующих волн (см., например, [10]), к которым относятся и термоконвективные волны.

В настоящей работе предполагается, что эволюция рельефа кратона вызвана начальными возмущениями топографии, а не температурными возмущениями, как в предыдущей работе [9]. Рассматривается кратон, расположенный между орогенными поясами, в которых происходят начальные возмущения рельефа, возбуждающие термоконвективные волны. В отличие от предыдущей работы [9], теперь принимается во внимание различие в плотности между корой и мантийной литосферой (скачок плотности на границе Мохо), но введено несколько упрощающих предположений: рассматривается только двумерная постановка задачи, используются упрощенные граничные условия на нижней поверхности литосферы, реология литосферы считается однородной, число Рэлея для литосферы предполагается в точности равным его минимальному критическому значению (это предположение позволяет пренебречь слабым затуханием термоконвективных волн в литосфере). Решение задачи может быть получено и без использования этих упрощений, как это сделано в [9]. Однако данные упрощения позволяют решить задачу аналитически и лучше понять физический смысл эффектов, связанных с начальным возмущением рельефа и скачком плотности на границе Мохо.

1. Основные уравнения

Линейная интегральная (имеющая память) реологическая модель литосферы, справедливая при малых деформациях, определяется интегральным соотношением

$$2e_{ij} = \int_0^t K(t-t_1)\sigma_{ij}(t_1)dt_1. \quad (1)$$

Здесь e_{ij} и σ_{ij} – тензоры девиаторов деформаций и напряжений, t – время, $K(t)$ – интегральное ядро ползучести

$$K(t) = t^{-2/3}/A, \quad (2)$$

где A – реологический параметр Андраде. Ядро ползучести определено таким образом, что в случае постоянных напряжений деформация зависит от времени как $t^{1/3}$ (закон Андраде для неустановившейся ползучести).

Реологическое соотношение (1) можно переписать в виде

$$\sigma_{ij} = \int_0^t \Pi(t - t_1) \dot{\epsilon}_{ij}(t_1) dt_1, \quad (3)$$

где $\Pi(t)$ – функция памяти.

Линеаризованные уравнения тепловой конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу, выписываются как

$$\begin{aligned} -\partial p / \partial x + \partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \sigma_{xz} / \partial z &= 0, \\ -\partial p / \partial z + \partial \sigma_{xz} / \partial x + \partial \sigma_{zz} / \partial z + Ra\theta &= 0, \\ \partial \nu_x / \partial x + \partial \nu_z / \partial z &= 0, \\ \partial \theta / \partial t - \nu_z - (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2)\theta &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где x и z – горизонтальная и вертикальная координаты; ν_i – скорость; θ и p – возмущения температуры и давления, соответственно. Система уравнений (4) записана в безразмерном виде. Масштаб длины – толщина литосферы d , масштаб температуры – перепад температуры ΔT между горячей нижней и холодной верхней поверхностями слоя (обе поверхности предполагаются изотермическими). Принимаются масштабы: d^2/\varkappa для времени и \varkappa/d для скорости. Для ньютоновской жидкости обычно принимается масштаб напряжения (и давления) $\varkappa\eta/d^2$, а число Рэлея определяется как $Ra = \rho g \alpha \Delta T d^3 / \eta \varkappa$, где ρ – плотность; α – коэффициент теплового расширения; g – гравитационное ускорение; η – ньютоновская вязкость, имеющая размерность Па с. Для реологической среды Андраде (параметр Андраде A имеет размерность Па с^{1/3}) введем масштабную вязкость

$$\eta_A = A(d^2/\varkappa)^{2/3}. \quad (5)$$

Тогда число Рэлея определено как

$$Ra = \rho g \alpha \Delta T d^3 / \eta_A \varkappa = \rho g \alpha \Delta T d (d^2/\varkappa)^{1/3} / A \quad (6)$$

и масштаб напряжения как $\varkappa\eta_A/d^2 = A(d^2/\varkappa)^{-1/3}$.

Литосфера характеризуется следующими усредненными по глубине значениями физических параметров [9]:

$$\begin{aligned} d = 2 \cdot 10^5 \text{ м}, \quad \Delta T = 1300 \text{ К}, \quad \alpha = 3 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}, \quad \rho = 3.3 \cdot 10^3 \text{ кг м}^{-3}, \\ g = 10 \text{ м с}^{-2}, \quad \varkappa = 10^{-6} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}, \quad A = 10^{12} \text{ Па с}^{1/3}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если верхнюю и нижнюю границы литосферы считать ”свободными”, то

$$\nu_z = \sigma_{xz} = \theta = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, z = 1. \quad (8)$$

Система уравнений (3), (4) и (8) имеет решение в виде термоконвективной волны

$$\begin{aligned} \nu_x &= C(i\pi/k) \exp[i(kx + \omega t)] \cos \pi z, \\ \nu_z &= C \exp[i(kx + \omega t)] \sin \pi z, \\ \theta &= CF(\omega)[(k^2 + \pi^2)^2 / \text{Ra } k^2] \exp[i(kx + \omega t)] \sin \pi z. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь: C – произвольный комплексный множитель, который определяет амплитуду волны; k – волновое число (действительное), описывающее периодичность в горизонтальном направлении; ω – комплексная частота (ее мнимая часть определяет затухание волны); $F(\omega)$ – комплексная вязкость:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} \Pi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (10)$$

правая часть уравнения (10) есть лапласовское изображение функции памяти $\Pi(t)$. Только на больших временах t комплексная вязкость $F(\omega)$ не зависит от t и можно принять $t = \infty$ в качестве верхнего предела интегрирования в уравнении (10). Таким образом, уравнения (9) и (10) дают асимптотическое решение.

Комплексная вязкость связана с волновым числом k дисперсионным соотношением

$$i\omega F(\omega)(k^2 + \pi^2)^2 + F(\omega)(k^2 + \pi^2)^3 - \text{Ra } k^2 = 0. \quad (11)$$

Это соотношение позволяет найти такое значение Ra_m числа Рэлея, называемое минимальным критическим числом Рэлея, при котором не затухает только волна с волновым числом $k = k_m$ и частотой $\omega = \omega_m$.

При введенных выше масштабах времени и напряжения следует опустить параметр Андраде A в уравнении (2). Тогда комплексная вязкость для реологической модели Андраде принимает вид

$$F(\omega) = (1/3)\Gamma(1/3)(i\omega)^{-2/3}, \quad \text{где } (1/3)\Gamma(1/3) \approx 1, \quad (12)$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция, а k_m , ω_m и Ra_m принимают следующие значения:

$$k_m = \sqrt{3}\pi/2 \approx 2.7, \quad \omega_m = \sqrt{3}(k_m^2 + \pi^2) = 7\sqrt{3}\pi^2/4 \approx 30, \quad (13)$$

$$\text{Ra}_m = 3^{-1/3}2(k_m^2 + \pi^2)^{7/3}/k_m^2 \approx 150.$$

Как следует из (5)–(7) и (13), число Рэлея для литосферы того же порядка, что и Ra_m . Таким образом, литосфера находится в состоянии, близком к режиму пороговой неустойчивости.

Вообще говоря, следует писать $n\pi$, где $n = 1, 2, 3 \dots$, вместо π в уравнениях (9) и (11). Рассматриваемая задача есть задача на собственные значения. Собственными значениями являются критические числа Рэлея, для которых частоты волн – действительные числа. Имеется бесконечный набор собственных значений и собственных функций, но минимальное критическое число Рэлея соответствует значению $n = 1$.

Для термоконвективных колебаний (суперпозиция двух волн, бегущих в противоположных направлениях), уравнения (9) следует заменить на

$$\begin{aligned} \nu_x &= -2C(\pi/k)\exp(i\omega t) \cos \pi z \sin kx, \\ \nu_z &= 2C\exp(i\omega t) \sin \pi z \cos kx, \\ \theta &= 2CF(\omega)[(k^2 + \pi^2)^2/Ra k^2]\exp(i\omega t) \sin \pi z \cos kx. \end{aligned} \quad (14)$$

2. Граничные условия

Литосфера моделируется как бесконечный горизонтальный слой $0 < z < 1$ (начало координат расположено на нижней границе литосферы). Для того, чтобы решить задачу о термоконвективных волнах в литосфере, следует задать условия на верхней границе $z = 1$ (земная поверхность), где имеют место седиментация и эрозия, и на нижней границе $z = 0$.

Седиментация и эрозия описываются уравнением диффузии, представленным в безразмерном виде

$$\partial\xi/\partial t = \nu_z(1) + a(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\xi, \quad (15)$$

где ξ – смещение земной поверхности (топография), $a = \lambda/\varkappa$ – безразмерный транспортный коэффициент, λ – размерный транспортный коэффициент. Согласно [11], депозитный транспортный коэффициент λ_s лежит в диапазоне между $10^3 \text{ м}^2\text{год}^{-1}$ и $5 \cdot 10^4 \text{ м}^2\text{год}^{-1}$. Эрозийный транспортный коэффициент λ_{er} примерно на порядок величины ниже, чем коэффициент λ_s . В уравнении (15) $a = a_{er}$ для $\xi > 0$, и $a = a_s$ для $\xi < 0$. Приведенные оценки λ_s были получены для неуплотненных осадков. Толщина осадков становится в 2–3 раза меньше после компакциии. Следовательно, λ_s для уплотненных осадков находится в диапазоне между $4 \cdot 10^2 \text{ м}^2\text{год}^{-1}$ и $2 \cdot 10^4 \text{ м}^2\text{год}^{-1}$. Этот коэффициент – наиболее неопределенный параметр в рассматриваемой задаче. В данной работе будет использована нижняя оценка $\lambda_s = 4 \cdot 10^2 \text{ м}^2\text{год}^{-1}$ ($a_s = 13$), принятая в предыдущем исследовании [8]. Для эрозийного коэффициента принимается оценка $a_{er} = 3$.

Скорость смещения земной поверхности представима как

$$\partial\xi/\partial t = \nu_z(1) + \partial h/\partial t, \quad (16)$$

где h – толщина осадков (h отрицательна в случае эрозии). Так как здесь рассматриваются только возмущения, не зависящие от y , можно опустить производную по y в уравнении (15). Тогда, подставляя (16) в (15), находим

$$\partial h/\partial t = a(\partial^2/\partial x^2)\xi. \quad (17)$$

Предполагается, что возмущения всех физических переменных отсутствуют до начального момента времени и, в частности, $\xi(t) \equiv 0$ при $t < 0$. (Это условие позволяет применять преобразование Лапласа в следующем разделе.) Поэтому начальное условие $\xi = \xi_0$ при $t = 0$ подразумевает, что смещение границы ξ меняется скачком от нуля до значения ξ_0 при $t = 0$. Чтобы описать ситуацию, когда смещение границы возрастает постепенно под действием некоторого процесса, отличного от седиментации и эрозии, следует включить дополнительный член ("источник") в уравнения (15) и (16)

$$\partial\xi/\partial t = \nu_z(1) + \partial h/\partial t + W(t), \quad (18)$$

$$\partial h/\partial t = \nu_z(1) + a(\partial^2/\partial x^2)\xi + W(t),$$

где $W(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t > t_0$, т.е., источник действует в диапазоне времени $0 \leq t \leq t_0$. Если t_0 значительно меньше, чем период термоконвективной волны, можно считать, что возмущение возникает мгновенно. Примером такого относительно быстрого процесса, производящего начальное смещение поверхности и утолщение коры, является надвиг, вызванный столкновением литосферных плит под орогенным поясом [12].

Граничные условия на верхней изотермической деформируемой поверхности литосферы при $z = 1$ выписываются в виде:

$$\sigma_{xz} = 0, \quad (19)$$

$$-p + \sigma_{zz} + \varphi\xi = 0, \quad (20)$$

$$\theta - \xi = 0, \quad (21)$$

где $\varphi = \rho g d(d^2/\kappa)^{1/3}/A$. Этот безразмерный параметр оценивается для литосферы как $\varphi \approx 3 \cdot 10^3$.

С учетом скачка плотности на границе между коровой и мантийной литосферой (граница Мохо) граничное условие (20) должно быть заменено на

$$(1/\varphi)(-p + \sigma_{zz}) + \xi - r(\xi - \zeta) = 0, \quad (22)$$

где $r = (\rho - \rho_{cr})/\rho$ – безразмерный параметр, определяющий скачок плотности на Мохо; ρ и ρ_{cr} – соответственно, плотности мантийной и кóровой литосферы; ζ – смещение границы Мохо. Граничное условие (22) справедливо при следующих предположениях: характерное время литификации осадков много меньше, чем период термоконвективной волны; после литификации плотность осадков и их реология становятся такими же, как плотность и реология коры. Смещение границы Мохо связано с вертикальной скоростью уравнением

$$\partial\zeta/\partial t = v_z \quad \text{при} \quad z = 1 - \delta, \quad (23)$$

где δ – безразмерная толщина коры. Поскольку параметр δ достаточно мал, уравнение (23) сводится при $z = 1$ к условию на верхней границе:

$$\partial\zeta/\partial t = v_z - \delta dv_z/dz. \quad (24)$$

Итак, помимо числа Рэлея, в рассматриваемой задаче появляются еще три безразмерных параметра r , φ и δ . Эти параметры, в отличие от числа Рэлея, входят в граничные условия. При толщине коры порядка 50 км и плотности $\rho_{cr} \approx 2.8 \cdot 10^3 \text{ кг м}^{-3}$, параметры r и δ оцениваются как $r \approx 0.15$, $\delta \approx 0.25$ и могут рассматриваться как малые параметры теории возмущений. Параметр $1/\varphi$ тоже мал ($1/\varphi \approx 3 \cdot 10^{-4}$). В нулевом приближении по $1/\varphi$ граничное условие (22) сводится к виду

$$\xi + r(\zeta - \xi) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) представляет условие изостазии (точнее, условие изостатической компенсации на границе Мохо). Принцип изостазии есть, по существу, принцип гидростатического равновесия в применении к континентальной коре. В нулевом приближении по $1/\varphi$ граничные условия сводятся к уравнениям для идеальной жидкости. Поскольку мы рассматриваем только медленные процессы и, следовательно, пренебрегаем инерционными членами, эти уравнения являются уравнениями гидростатики.

Условия на нижней границе ($z = 0$) литосферного слоя заданы уравнениями (8). Как показано в работах [8, 9], использование неоднородной реологической модели и граничных условий, лучше аппроксимирующих реальную ситуацию на нижней границе, не меняет результаты, полученные для упрощенной модели литосферы со "свободной" нижней границей и однородной реологией, больше, чем в несколько раз. Поскольку значения реологического параметра и транспортных коэффициентов следует рассматривать как оценки по порядку величины, упрощенная модель соответствует рассматриваемой задаче. Эта модель, однако, не может правильно описать распределение скоростей в нижней части литосферы.

3. Преобразования Фурье и Лапласа

Решая рассматриваемую задачу, удобно применять преобразование Фурье по горизонтальной координате x и преобразование Лапласа по времени t . Изображение Фурье, обозначаемое заглавной буквой, связано с оригиналом уравнениями

$$B(k, z, t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} b(x, z, t) \exp(-ikx) dx, \quad (26)$$

$$b(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(k, z, t) \exp(ikx) dk, \quad (27)$$

которые определяют прямое и обратное преобразование Фурье. В уравнениях (26) и (27) b обозначает любую из физических переменных ν_i , u_i , e_{ij} , σ_{ij} , p , θ , ξ и ζ . Только одно свойство преобразования Фурье используется при решении задачи: производной db/dx соответствует изображение ikB , что сразу следует из соотношения (27).

Преобразование Лапласа – удобный математический метод для решения дифференциальных уравнений с начальными условиями, к которым сводится задача о возбуждении термоконвективных волн в литосфере. Изображение Лапласа, обозначаемое звездочкой, связано с оригиналом уравнениями

$$b^*(s, x, z) = \int_0^{\infty} b(t, x, z) \exp(-st) dt, \quad (28)$$

$$b(t, x, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} b^*(s, x, z) \exp(st) ds. \quad (29)$$

Преобразование Лапласа (28) предполагает, что $b(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и что функция $b(t)$ растет не быстрее, чем экспонента $\exp(pt)$, где p – показатель роста функции $b(t)$. В уравнении (29) c – произвольная константа, ограниченная только условием $c > p$. Переменная Лапласа s является комплексным числом в отличие от переменной Фурье (действительного волнового числа) k .

Для рассматриваемой задачи легко найти лапласовское изображение искомого решения. Значительно труднее обратить полученное изображение. Для обращения лапласовского изображения будет применяться известная теорема об асимптотическом поведении оригинала

(см., например, [13]), а не уравнение (29). Согласно этой теореме, для того, чтобы найти асимптотическое решение на больших временах ($t \rightarrow \infty$), достаточно знать лапласовское изображение в окрестности особой точки s_0 , которая имеет максимальную действительную часть по сравнению с другими особыми точками. Если лапласовское изображение $b^*(s)$ в окрестности особой точки s_0 можно разложить в степенной ряд

$$b^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s - s_0)^{\lambda_n}, \quad \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad (30)$$

то оригинал $b(t)$ представляется при $t \rightarrow \infty$ в виде асимптотического разложения

$$b(t) = \exp(s_0 t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{-\lambda_n - 1} / \Gamma(-\lambda_n), \quad (31)$$

где Γ – гамма-функция. Так как $1/\Gamma(0) = 1/\Gamma(-1) = 1/\Gamma(-2) = \dots = 0$, члены ряда (30), для которых λ_n равно нулю или положительному целому числу, не дают вклад в асимптотическое разложение (31). Если лапласовское изображение имеет несколько особых точек, действительные части которых равны друг другу и максимальны по сравнению с остальными особыми точками, то для того, чтобы получить асимптотическое решение, достаточно суммировать разложения, найденные для каждой из особых точек с максимальной действительной частью.

Если особая точка s_0 является полюсом порядка N , лапласовское изображение $b^*(s)$ в окрестности s_0 можно представить в виде ряда по целым степеням $s - s_0$ (ряд Лорана)

$$b^*(s) = \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (s - s_0)^n. \quad (32)$$

Разложение (32) можно рассматривать как частный случай разложения (30), где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ – целые числа, а $\lambda_0 = -N$. Если s_0 – полюс первого порядка ($N = 1$), уравнение (31) сводится к виду

$$b(t) = c_{-1} \exp(s_0 t). \quad (33)$$

Следует заметить, что решение (33), полученное с помощью теоремы об асимптотическом поведении оригинала, справедливо при любых временах, а не только при $t \rightarrow \infty$.

Если все особые точки лапласовского изображения $b^*(s)$ являются полюсами, то, согласно теореме разложения, оригинал записывается как

$$b(t) = \sum_k \operatorname{res}_{s_{0k}} [b^*(s) \exp(st)], \quad (34)$$

где сумма вычетов берется по всем полюсам s_{0k} . В случае, когда изображение не имеет других особенностей, кроме полюсов, теорема об асимптотическом поведении оригинала приводит к тому же результату, что и теорема разложения. В следующих разделах будет использоваться, однако, теорема об асимптотическом поведении оригинала, так как в рассматриваемой задаче лапласовское изображение, помимо полюса первого порядка, имеет особенность $s = 0$, которая является точкой ветвления.

После преобразований Фурье и Лапласа реологическое соотношение (3) принимает вид

$$\Sigma_{ij} = 2\Pi^*(s) \dot{E}_{ij}^*, \quad (35)$$

где в случае реологической модели Андраде

$$\Pi^*(s) = 1/sK^*(s), \quad K^*(s) = s^{-1/3}. \quad (36)$$

Таким образом, комплексная функция

$$F(s) = \Pi^*(s) = s^{-2/3} \quad (37)$$

является аналогом ньютоновской вязкости. Преобразуя систему исходных уравнений (4) по Фурье и по Лапласу и исключая все физические переменные, кроме вертикальной скорости, из первых трех преобразованных уравнений системы (4), находим

$$\begin{aligned} V_x^* &= iDV_z^*/k, \\ P^* &= F(s)(D^3 - k^2D)V_z^*/k^2, \\ \Sigma_{zz}^* &= -\Sigma_{xx}^* = 2F(s)DV_z^*, \\ \Sigma_{xz}^* &= iF(s)(D^2 + k^2)V_z^*/k, \\ \Theta^* &= F(s)(D^2 - k^2)^2V_z^*/(\operatorname{Ra} k^2), \end{aligned} \quad (38)$$

где введен дифференциальный оператор $D = d/dz$, который можно использовать и при записи граничного условия (24).

Подставляя последнее из уравнений (38) в последнее из преобразованных уравнений (4), получаем

$$[sF(s)(D^2 - k^2)^2 - F(s)(D^2 - k^2)^3 - \operatorname{Ra} k^2]V_z^* = \operatorname{Ra} k^2 \Theta_0(k, z), \quad (39)$$

где $\Theta_0(k, z)$ – изображение Фурье распределения температуры в литосфере в начальный момент $t = 0$.

Как следует из (35)–(38), преобразованные граничные условия (19), (21) и (22) при $z = 1$ имеют вид:

$$\begin{aligned} (D^2 + k^2)V_z^* &= 0, \\ (1/\varphi)F(s)[3D - (D^3/k^2)]V_z^* + \Xi^* + r(Z^* - \Xi^*) &= 0, \\ F(s)(D^2 - k^2)^2V_z^* - \text{Ra} k^2 \Xi^* &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Преобразованные граничные условия (17) и (24) при $z = 1$ записываются как

$$\Xi^* = [V_z^* + \Xi_0]/(s + ak^2), \quad (41)$$

$$Z^* = [V_z^* - \delta DV_z^* + Z_0]/s, \quad (42)$$

где Ξ_0 и Z_0 – изображения Фурье начальных смещений земной поверхности и границы Мохо.

Подстановка (41) и (42) в (40) исключает Ξ^* и Z^* из граничных условий при $z = 1$

$$\begin{aligned} V_z^* + \Xi_0 + r[(s + ak^2)/s][V_z^* - \delta DV_z^* + Z_0] &= 0, \\ (D^2 + k^2)V_z^* &= 0, \\ (D^2 - k^2)^2V_z^* - \text{Ra} k^2 s^{2/3}(V_z^* + \Xi_0)/(s + ak^2) &= 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Граничные условия (43) представлены в нулевом приближении по малому параметру $1/\varphi$. Первое из уравнений (43) удобно переписать в виде

$$V_z^* - r[(s + ak^2)/(s + rak^2)](\delta DV_z^* + \Xi_0 - Z_0) + \Xi_0 = 0. \quad (44)$$

Нижняя граница литосферы предполагается "свободной". Тогда решение должно удовлетворять граничным условиям при $z = 0$

$$V_z^* = (D^2 + k^2)V_z^* = (D^2 - k^2)^2V_z^* = 0. \quad (45)$$

Уравнения (45) легко упрощаются:

$$V_z^* = D^2V_z^* = D^4V_z^* = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (46)$$

Два малых параметра r и δ входят в граничные условия (43) и (44). В следующих разделах будет использовано нулевое приближение по δ . В этом приближении граничные условия имеют вид ($z = 1$):

$$\begin{aligned} V_z^* &= -\Xi_0 + r[(s + ak^2)/(s + rak^2)](\Xi_0 - Z_0), \\ (D^2 + k^2)V_z^* &= 0, \\ (D^2 - k^2)^2V_z^* &= \text{Ra} k^2 s^{2/3}r(\Xi_0 - Z_0)/(s + rak^2). \end{aligned} \quad (47)$$

4. Решение в изображениях Фурье

Предполагая, что $\Theta_0(z) \equiv 0$, будем решать задачу при начальных возмущениях верхней и нижней границ коры (Ξ_0 и Z_0 не равны нулю). Случай, когда $\Theta_0(z) = \Theta_0 \sin \pi z$ и $\Xi_0 = Z_0 = 0$, был рассмотрен в работе [9]. Общее решение уравнения (39) записывается в виде

$$V_z^*(z, s) = \sum_{j=1}^3 A_j \operatorname{sh} q_j z + B_j \operatorname{ch} q_j z, \quad (48)$$

где A_j и B_j зависят от s , а q_j , также зависящие от s , представляют собой три корня ($j = 1, 2, 3$) уравнения

$$s^{1/3}(q^2 - k^2)^2 - s^{-2/3}(q^2 - k^2)^3 - \operatorname{Ra} k^2 = 0. \quad (49)$$

Подставляя (48) в граничные условия (46), находим, что $B_j = 0$ при $j = 1, 2, 3$. Подставляя (48) в граничные условия (47), получаем систему линейных алгебраических уравнений для A_j

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh} q_1 & \operatorname{sh} q_2 & \operatorname{sh} q_3 \\ (q_1^2 + k^2) \operatorname{sh} q_1 & (q_2^2 + k^2) \operatorname{sh} q_2 & (q_3^2 + k^2) \operatorname{sh} q_3 \\ (q_1^2 - k^2)^2 \operatorname{sh} q_1 & (q_2^2 - k^2)^2 \operatorname{sh} q_2 & (q_3^2 - k^2)^2 \operatorname{sh} q_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ M \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где L и M – правые части уравнений (47):

$$\begin{aligned} L &= -\Xi_0 + r[(s + ak^2)/(s + rak^2)](\Xi_0 - Z_0), \\ M &= \operatorname{Ra} k^2 s^{2/3} r (\Xi_0 - Z_0) / (s + rak^2). \end{aligned}$$

Решение уравнения (50) можно представить как

$$A_j = (LQ_j + MP_j)/(Q \operatorname{sh} q_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (51)$$

где

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 \\ q_1^4 & q_2^4 & q_3^4 \end{vmatrix}, \quad P_1 = q_3^2 - q_2^2, \quad Q_1 = \begin{vmatrix} q_2^2 + k^2 & q_3^2 + k^2 \\ (q_2^2 - k^2)^2 & (q_3^2 - k^2)^2 \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Выражения для Q_2 , Q_3 , P_2 и P_3 легко получить из (52) круговой перестановкой индексов. Кроме того,

$$\sum_{j=1}^3 Q_j = Q, \quad \sum_{j=1}^3 P_j = 0. \quad (53)$$

Таким образом, как следует из (48) и (51), решение задачи имеет вид

$$V_z^*(z, s) = \sum_{j=1}^3 [L(Q_j/Q) + M(P_j/Q)] \operatorname{sh} q_j z / \operatorname{sh} q_j. \quad (54)$$

Когда $q_1 = i\pi$ и, следовательно, $\operatorname{sh} q_1 = 0$, правая часть (54) обращается в бесконечность. Решая уравнение (49), в котором $\operatorname{Ra} = \operatorname{Ra}_m$ определено равенством (13), а $q = i\pi$, находим три значения s . Однако выражение $F = s^{-2/3}$ предполагает, что, извлекая кубический корень из s , следует брать только первое значение корня, для которого аргумент комплексного числа s удовлетворяет условию $0 \leq \arg s \leq 2\pi$. При этом условии два из трех полученных значений s не являются корнями уравнения (49). Таким образом, лапласовское изображение вертикальной скорости (54) имеет особенность $s = i\omega$, где $i\omega$ обозначает единственный корень уравнения (49) при $q = i\pi$ и $\operatorname{Ra} = \operatorname{Ra}_m$. Заметим, что уравнение (49) сводится к уравнению (11) после подстановки $q = i\pi$ и $s = i\omega$. Следовательно, особенность лапласовского изображения (54) определена частотой термоконвективной волны. Когда $k = k_m$, мнимая часть ω обращается в нуль: $\omega = \omega_m = \sqrt{3}(k_m^2 + \pi^2)$ согласно (13).

Далее с помощью уравнения (49) выражаем q_1 и $\operatorname{sh} q_1 z$ в виде степенных рядов по $(s - i\omega)$. В случае, когда $k = k_m$, эти разложения имеют вид

$$\begin{aligned} q_1 &= i\pi - (i/18\pi)(s - i\omega_m) + \dots, \\ \operatorname{sh} q_1 &= (i/18\pi)(s - i\omega_m) + \dots, \\ \operatorname{sh} q_1 z &= i \sin \pi z - (i/18\pi)(s - i\omega_m)z \cos \pi z + \dots \end{aligned} \quad (55)$$

Положив $s = i\omega_m$ и $q_1 = i\pi$ в уравнении (49), легко найти q_2 и q_3 из алгебраического биквадратного уравнения. Подставляя найденные значения q_1, q_2 и q_3 в уравнение (52), получаем при $k = k_m$

$$\begin{aligned} Q_1/Q &= (26/49)\sqrt{3} \exp(i\pi/6), \\ P_1/Q &= [16/(49\sqrt{21}\pi^4)] \exp(i\alpha), \\ \alpha &= \operatorname{arctg}(-2\sqrt{3}/3). \end{aligned} \quad (56)$$

Лапласовское изображение вертикальной скорости (54) можно представить в виде ряда Лорана в окрестности точки $s = i\omega$

$$V_z^*(z, s, k) = c_{-1}(s - i\omega)^{-1} + c_0 + c_1(s - i\omega) + c_2(s - i\omega)^2 + \dots, \quad (57)$$

где c_{-1}, c_0, c_1, \dots зависят от k и z , а ω зависит от k . С помощью равенств (55) и (56) находим коэффициент c_{-1} при $k = k_m$

$$\begin{aligned} c_{-1} &= C \sin \pi z, \\ C &= G_1 \{-\Xi_0 + r[(i\omega_m + ak_m^2)/(i\omega_m + rak_m^2)](\Xi_0 - Z_0)\} + \\ &+ G_2 [ir\omega_m/(i\omega_m + rak_m^2)](\Xi_0 - Z_0), \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \text{где } G_1 &= 18\pi Q_1/Q, \\ G_2 &= 18\pi(P_1/Q)\text{Ra}_m k_m^2 (i\omega_m)^{-1/3} = (36\pi\sqrt{7}/21)\exp[i(\alpha - \pi/6)]. \end{aligned}$$

Модули комплексных чисел G_1 и G_2 оцениваются как $|G_1| \approx 51$, $|G_2| \approx 14$.

Разложение (57) означает, что особая точка $s = i\omega$ является полюсом первого порядка. Подставляя $s_0 = i\omega$ в (33), находим оригинал, соответствующий лапласовскому изображению (54),

$$V_z(k, z, t) = C(k) \sin \pi z \exp(i\omega t), \quad (59)$$

где амплитудный коэффициент $C(k)$ определен равенством (58) при $k = k_m$. Напомним, что $V_z(k, z, t)$ – изображение Фурье вертикальной скорости, которое получено в нулевом приближении по δ .

5. Переходные процессы

Если бы лапласовское изображение (54) не имело других особых точек, кроме полюса $s = i\omega$, уравнение (59) давало бы полное решение задачи, справедливое при любых t . Однако правая часть уравнения (54) имеет еще одну особенность: $s = 0$ – точка ветвления. Эта особенность появляется потому, что правая часть (54) неявно (см. уравнение (49)) зависит от дробных степеней s . Следовательно, разложение по дробным степеням s в окрестности особой точки $s = 0$ необходимо добавить в правую часть уравнения (57).

Итак, лапласовское изображение вертикальной скорости в нулевом приближении по δ представимо в виде суммы разложений

$$V_z^{*(0)}(s, z) = c_{-1}(s - i\omega)^{-1} + \dots + b_0 + b_1 s^{2/3} + \dots, \quad (60)$$

где индекс (0) обозначает нулевое приближение по δ и выписаны только первые члены рядов по степеням $(s - i\omega)$ и по дробным степеням s (см. Приложение 1). В равенстве (60) коэффициент c_{-1} при $k = k_m$ определен формулой (58), а коэффициенты b_0 и b_1 даются выражениями:

$$\begin{aligned} b_0 &= -Z_0(\text{sh}kz/\text{sh}k)(1 - kz \coth kz + k \coth k), \\ b_1 &= (\text{Ra}/16k^3 a)(\text{sh}kz/\text{sh}k)[Z_0 a F_1(k, z) + 2(\Xi_0 - Z_0)F_2(k, z)], \end{aligned} \quad (61)$$

где $F_1(k, z)$ и $F_2(k, z)$ выписаны в Приложении 1.

Поскольку в литосфере нет смещений в начальный момент (предполагается, что только ее верхняя граница испытывает начальную деформацию), лапласовские изображения смещения и скорости связаны между собой соотношением

$$U_z^*(s, z) = (1/s)V_z^*(s, z). \quad (62)$$

Равенство (62) следует из простого линейного соотношения $\partial u_z / \partial t = v_z$, которое справедливо при достаточно малых смещениях в литосфере (условие малости смещений выполняется для термоконвективных волн, которые связаны с малыми деформациями). Переменная u_z обозначает смещение материальной частицы и, следовательно, уравнение (62) связывает лагранжовское смещение с эйлеровской скоростью, измеряемой в фиксированной точке пространства.

Как следует из (60) и (62), лапласовское изображение смещения представимо в виде суммы разложений в окрестностях точек $s = i\omega$ и $s = 0$:

$$U_z^{*(0)}(s, z) = (c_{-1}/i\omega)(s - i\omega)^{-1} + \dots + b_0/s + b_1s^{-1/3} + \dots \quad (63)$$

После подстановки (61) в (63) и обращения преобразования Лапласа находим асимптотические смещения в литосферном слое ($0 < z < 1$)

$$U_z^{(0)}(t, z) = (C/i\omega) \sin \pi z \exp(i\omega t) - Z_0(\text{sh}kz/\text{sh}k)(1 - kz \coth kz + k \coth k). \quad (64)$$

Из (64) получаем выражение для смещения на верхней поверхности ($z = 1$) на больших временах

$$U_z^{(0)}(t, 1) = -Z_0. \quad (65)$$

Подставляя (60) в уравнения (41) и (42), где $\delta = 0$, нетрудно показать, что Ξ и Z обращаются в нуль на больших временах. Следует заметить, что, согласно (23), скорость смещений на границе Мохо равна скорости смещений материальных частиц, расположенных на этой границе (граница Мохо, в отличие от верхней границы земной коры, состоит из одних и тех же материальных частиц в любой момент времени). Однако смещение границы Мохо отличается на константу от смещения материальной частицы, расположенной на этой границе, поскольку смещение материальной частицы отсчитывается от ее положения в начальный момент ($U_z(0, z) \equiv 0$). Обращение уравнения (42) в нулевом приближении по δ дает: $Z(t) - Z_0 = U_z(t, 1)$. Следовательно, уравнение (65) показывает, что смещение границы Мохо стремится к нулю на больших временах в отличие от смещений частиц, находящихся на этой границе. Таким образом, в рамках нулевого приближения по δ начально деформированные границы (Ξ_0 и Z_0 не равны нулю) становятся в конце концов горизонтальными плоскостями.

Параметр δ рассматривается здесь как малый параметр теории возмущений. Поэтому все физические переменные и, в частности, верти-

кальная скорость представляются в виде разложений по малому параметру δ

$$V_z = V_z^{(0)} + \delta V_z^{(1)} + \dots \quad (66)$$

Подставляя разложение (66) в граничное условие (44) и опуская члены порядка δ^2 , приводим уравнение (44) к виду

$$V_z^* + \Xi_0 - r[(s + ak^2)/(s + rak^2)][\Xi_0 - Z_0 + \delta DV_z^{*(0)}] = 0 \text{ при } z = 1. \quad (67)$$

Уравнение (67) дает граничное условие в первом приближении по δ .

Сравнивая (67) и (41), получаем

$$\Xi^* = [r/(s + rak^2)](\Xi_0 - Z_0 + \delta DV_z^{*(0)}), \quad (68)$$

где $V_z^{*(0)}$ – сумма разложений (60). Подставляя (60) в (68), находим

$$\begin{aligned} \Xi^* = & r(\Xi_0 - Z_0)(s + rak^2)^{-1} + s^{2/3}\delta Db_1/ak^2 - \\ & - r\delta\pi C(i\omega + rak^2)^{-1}(s - i\omega)^{-1}, \end{aligned} \quad (69)$$

где опущен член, в который входит b_0 , поскольку этот член не дает вклад в лапласовский оригинал. Производная Db_1 берется при $z = 1$. Как следует из (69),

$$\begin{aligned} \Xi &= \Xi_{\text{tr}}(t) + r\delta\pi C(i\omega + rak^2)^{-1} \exp(i\omega t), \\ \Xi_{\text{tr}}(t) &= r(\Xi_0 - Z_0) \exp(-rak^2 t) + \delta(Db_1/ak^2)t^{-5/3}\Gamma(-2/3), \end{aligned} \quad (70)$$

где $\Xi_{\text{tr}}(t)$ описывает переходные процессы и исчезает на больших временах. Как следует из уравнения (70), переходные процессы заканчиваются тем быстрее, чем больше значение параметра a , который характеризует скорость седиментации и эрозии.

Если земная поверхность и граница Мохо испытывают начальные возмущения в некоторой области, то переходные процессы протекают в этой области и в ближайших регионах в то время, как термоконвективные волны распространяются без затухания из области начального возмущения на расстояния, значительно превышающие размеры этой области. Следовательно, рассматривая термоконвективные волны на больших расстояниях от их источника, т.е. от области начального возмущения, можно игнорировать переходные процессы.

Итак, изображение Фурье возмущения земной поверхности (топографии) на достаточно больших расстояниях от области начального возмущения определяется уравнением

$$\Xi(t, k) = -r\delta\pi C(i\omega + rak^2)^{-1} \exp(i\omega t), \quad (71)$$

где C и ω – функции k . Для $k = k_m$ амплитудный множитель $C(k_m)$ определен равенством (58), а $\omega(k_m) = \omega_m$.

Если начальные возмущения положительны (земная поверхность приподнята в начальный момент), переходные процессы связаны с эрозией. В этом случае $a = a_{er}$ в выражении для Ξ_{tr} , которое дает равенство (70), и в уравнении (58), которое определяет множитель C . Однако, когда термоконвективные волны покидают область начального возмущения, они периодически поднимают и опускают земную поверхность, и эрозия периодически сменяется седиментацией. В уравнении (71), следовательно, $a = a_{er}$ в течение полупериода колебания поверхности и $a = a_s$ в течение следующего полупериода.

6. Обращение преобразования Фурье при заданных начальных условиях

Согласно (27), распределение скоростей в литосфере и рельеф земной поверхности, соответствующие их изображениям Фурье (59) и (71), записываются в виде

$$\nu_z(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{-1}(k, z) \exp[i(kx + \omega(k)t)] dk, \quad (72)$$

$$\xi(x, t) = -r\delta\pi \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega + rak^2)^{-1} C(k) \exp[i(kx + \omega(k)t)] dk. \quad (73)$$

Как показано в предыдущей работе [9], при достаточно больших временах, прошедших с момента начального возмущения, уравнение (72) сводится к виду

$$\nu_z(x, z, t) = (\pi/\beta t)^{1/2} C(k_m) \sin \pi z \exp\left[i(\omega_m t + k_m x) - \frac{(x + Vt)^2}{4\beta t}\right], \quad (74)$$

где V и β – коэффициенты в разложении комплексной частоты ω в степенной ряд в окрестности $k = k_m$

$$i\omega = i\omega_m + iV(k - k_m) - \beta(k - k_m)^2 + \dots \quad (75)$$

Для рассматриваемой в данной работе реологической модели Андраде

$$V = 3\pi, \quad \beta = (72 + i\sqrt{3})/7, \quad (76)$$

V означает безразмерную групповую скорость термоконвективных волн, а коэффициент $\beta = d^2\omega/dk^2|_{k=k_m}$ определяет дисперсию. Коэффициенты V и β в уравнениях (75) и (76) найдены из дисперсионного соотношения (11). Уравнение (74) справедливо при $|\beta|t \gg 1$. Так как $|\beta| \approx 10$, это условие выполняется для $t \gg 1/10$.

Уравнение (74) описывает волновой пакет. Ширина пакета и время, за которое пакет проходит через фиксированную точку, оцениваются как

$$\begin{aligned} 2\Delta x &\approx 2(|\beta|t)^{1/2}, \\ 2\Delta t &\approx 2(|\beta|t)^{1/2}/V. \end{aligned} \quad (77)$$

Пусть начальное возмущение имеет вид

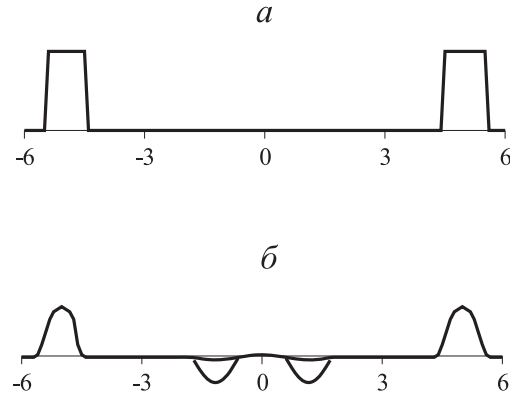
$$\begin{aligned} \xi_0(x) &= \xi_0, \quad \text{если } |x| < l, \\ \xi_0(x) &= 0, \quad \text{если } |x| > l, \end{aligned} \quad (78)$$

где $2l$ – ширина области начального возмущения. Подставляя (78) в (26), получаем изображение Фурье такого начального возмущения

$$\Xi_0(k) = (\xi_0/\pi k) \sin kl. \quad (79)$$

Рассмотрим кратон, имеющий ширину $2L$ и расположенный между орогенными поясами (рис. 1, *a*), начальные возмущения в которых описываются уравнениями (78). Ширина орогенного пояса значительно меньше, чем ширина кратона, т.е. $l < L$. Два пакета термоконвективных волн, возбуждаемых в орогенных поясах, распространяются от краев кратона к его центру. Бегущие волновые пакеты встречаются в центральной части кратона в момент времени $t_0 = L/V$ и образуют зону колебаний, показанную на рис. 1, *б*. Зона колебаний (стоячих волн) имеет ширину порядка $2(|\beta|t_0)^{1/2}$ и время существования порядка $2(|\beta|t_0)^{1/2}/V$. При $L \approx 5$ (ширина кратона около 2000 км) ширина зоны колебаний составляет приблизительно 5 (половина ширины кратона), а время существования этой зоны – порядка $1/2$ (2.5 периода термоконвективных волн). Напомним, что период оценивается как $2\pi/\omega_m \approx 1/5$, а длина волны как $2\pi/k_m \approx 2$. Как следует из (74), амплитуда вертикальной скорости для термоконвективных колебаний в центральной части кратона равна $(\pi/|\beta|t)^{1/2}C(k_m)$, где t лежит в диапазоне $t_0 - \Delta t \leq t \leq t_0 + \Delta t$, а Δt определена уравнением (77). Поскольку $\Delta t \ll t_0$, множитель $(\pi/|\beta|t)^{1/2}$ можно считать постоянным, подставив t_0 вместо t . Для $L \approx 5$ этот множитель приближенно равен 1 и, следовательно, амплитуда колебаний вертикальной скорости равна $2C(k_m)$ и определена уравнением (58).

Рис. 1. Топография земной поверхности в регионе кратона в начальный момент (а) и после образования системы осадочных бассейнов (б)



Для стоячих волн смещение записывается в виде

$$u_z(x, z, t) = U \sin \pi z \cos k_m x \exp(i\omega_m t), \quad (80)$$

где амплитуда смещения U в два раза выше, чем амплитуда смещения в бегущей волне. Как следует из (58) и (59),

$$U = 2C(k_m)/i\omega_m. \quad (81)$$

Полученные выше оценки параметров r, k_m, ω_m, a_{er} и a_s удовлетворяют неравенству

$$r a k_m^2 \ll \omega_m. \quad (82)$$

Условие (82) позволяет использовать r как малый параметр теории возмущений при рассмотрении термоконвективных волн, для которых $k \approx k_m$. Представляя $V_z^{(0)}$ и $V_z^{(1)}$ в уравнении (66) в виде степенных рядов по r , можно переписать правую часть равенства (66) в виде степенного ряда по малым параметрам r и δ . Как следует из (58) и (81), при условии (82)

$$U = 3.2 \Xi_0(k_m) \exp(i2\pi/3). \quad (83)$$

Уравнение (80), в котором U задано равенством (83), справедливо в нулевом приближении по δ и r . В этом приближении нет смещения земной поверхности ($\Xi = 0$), а амплитуды C и U не зависят от a . В следующем приближении по малым параметрам из уравнений (73) и (81) при условии (82) следует, что на больших временах

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \Xi \cos k_m x \exp(i\omega_m t), \\ \Xi &= -r\delta\pi U, \end{aligned} \quad (84)$$

где ξ – топография земной поверхности, обусловленная термоконвективными колебаниями (стоячими волнами). Восходящие конвективные течения поднимают границу Мохо и, в соответствии с условием изостазии (25), опускают земную поверхность (рис. 2). Амплитуда топографии Ξ для стоячих волн в два раза выше, чем для бегущих волн.

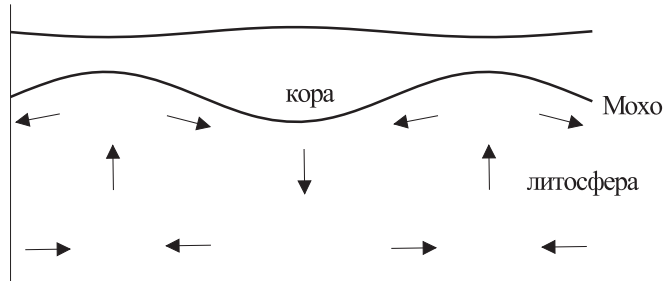


Рис. 2. Термоконвективные колебания в литосфере

Стрелками показаны направления конвективных течений: горячий материал движется вверх и поднимает границу Мохо, холодный материал – вниз и опускает границу Мохо; направления течений меняются на противоположные через полупериод колебания

После преобразования Фурье по x , уравнение (17) принимает вид

$$\partial H / \partial t = -ak^2 \Xi. \quad (85)$$

Подставляя (84) в (85) (где $k = k_m$) и интегрируя, находим толщину осадков ΔH , накопленную в течение такого полупериода конвективных колебаний, когда земная поверхность над конвективной ячейкой в литосфере опускается:

$$\Delta H = 2a_s r \delta \pi (k_m^2 / \omega_m) |U|. \quad (86)$$

Когда начальная топография задана соотношениями (78), из уравнения (79) следует, что при $l = 1/2$ (ширина орогенного пояса порядка 200 км) изображение Фурье $\Xi_0(k_m)$ связано с ξ_0 как

$$\Xi_0(k_m) = (\xi_0 / \pi k_m) \sin k_m l \approx \xi_0 / 8. \quad (87)$$

Как следует из (83), (84) и (87),

$$|U| / \xi_0 \approx 0.4, \quad |\Xi| / \xi_0 \approx 0.4r\delta\pi \approx 0.05. \quad (88)$$

Равенство (86) показывает, что для накопления за полупериод слоя осадков толщиной 1 км нужно, чтобы амплитуда вертикального смещения на глубине 100 км ($z = 1/2$) была равна 1.7 км. При таком смещении

уравнения (88) дают амплитуду колебаний земной поверхности порядка 200 м и начальное возмущение рельефа порядка 4 км.

Согласно уравнениям (88), $|U|$ и ξ_0 – одного порядка, а $|\Xi|$ – много меньше, поскольку параметры r и δ малы. Термоконвективные колебания вызывают большие смещения внутри конвективного слоя (литосферы) и малые смещения на его поверхности. Чтобы возбудить термоконвективные колебания с амплитудой смещения поверхности $|\Xi|$, требуется начальное возмущение ξ_0 , значительно превосходящее амплитуду $|\Xi|$. Большое начальное возмущение поверхности вызывает течение в литосфере, связанное с изостатической компенсацией. Это течение (в нулевом приближении по $1/\varphi$ его скорость бесконечна) создает большие смещения во внутренней части литосферы (см. Приложение 2, где найдено решение на малых временах). Эти большие смещения и возбуждают термоконвективные волны в литосфере.

Уравнение (83) следует из (58) при условии $rZ_0 \ll \Xi_0$, т.е. когда начальное возмущение границы Мохо мало и изостатическое равновесие нарушается в начальный момент (изостазия быстро восстанавливается).

Теперь рассмотрим случай, когда начальное возмущение удовлетворяет условию изостазии

$$\Xi_0 + r(Z_0 - \Xi_0) = 0. \quad (89)$$

Тогда, вместо равенства (83), из (58), (81), (82) и (89) получаем

$$U = [-a_{er}0.8 \exp(i\pi/6) + 0.9 \exp i(\alpha - 2\pi/3)]\Xi_0(k_m), \quad (90)$$

где второй член в квадратных скобках обусловлен термическим эффектом, связанным с начальным возмущением рельефа земной поверхности. Если a_{er} достаточно мало ($a_{er} \leq 1$), первый член в квадратных скобках в равенстве (90) можно опустить: термоконвективные волны возбуждаются термическим эффектом. При больших a_{er} ($a_{er} \geq 3$) термическим эффектом можно пренебречь, а возбуждение термоконвективных волн происходит за счет эрозии. Действительно, когда начальное возмущение рельефа изостатически скомпенсировано (уравнение (90) выведено при этом условии), то нет начальных напряжений, действующих на литосферу, однако медленный процесс эрозии возмущает изостатическое равновесие. Чтобы восстановить изостатическое равновесие, в литосфере возникает быстрое (при большом φ) течение. Это течение вызывает большие смещения во внутренней части литосферы и возбуждает термоконвективные волны (см. подробнее в Приложении 2).

В случае начальной изостазии и медленной эрозии ($a_{er} \leq 1$) коэффициент в уравнении (83) получается значительно меньшим, чем 3.2,

и для возбуждения термоконвективных волн с амплитудой, необходимой для образования осадочных бассейнов, требуется значительно более сильное начальное возмущение рельефа в орогенных поясах. При $a_{er} = 3$ численные коэффициенты в уравнениях (83) и (87) и последующие оценки остаются примерно такими же, как в рассмотренном выше случае, когда нет начальной изостазии.

Заключение

Цель данного исследования – включить эффекты, вызванные начальным возмущением рельефа земной поверхности, и эффекты, обусловленные скачком плотности на границе Мохо, в термоконвективную теорию происхождения осадочных бассейнов, развиваемую автором. Оказывается (см. Приложение 2), что эти эффекты тесно связаны: если не принимать во внимание скачок плотности на границе Мохо, потребовались бы нереально большие начальные смещения поверхности для возбуждения таких термоконвективных колебаний, которые приводят к наблюдаемому накоплению осадков в бассейнах.

Наиболее интересный физический эффект, который возникает в задаче о возбуждении термоконвективных волн начальным возмущением земной поверхности, состоит в следующем. Как любое конвективное движение, термоконвективные волны вызывают большие смещения внутри конвективного слоя (литосферы) и малые смещения на его поверхности. Для возбуждения термоконвективных волн требуются большие начальные смещения во внутренней части литосферы. Большие начальные смещения поверхности вызывают течение в литосфере, связанное с изостатической компенсацией. Это течение и создает внутри литосферы большие смещения, возбуждающие термоконвективные волны. Даже изостатически скомпенсированные начальные возмущения рельефа поверхности могут возбуждать термоконвективные волны. В этом случае начальная изостазия нарушается процессом эрозии.

Когдадвигающиеся навстречу друг другу пакеты термоконвективных волн встречаются в центральной части кратона, они образуют зону колебаний (стоячих волн), которая представляет собой систему конвективных ячеек в литосфере. Над конвективными ячейками поверхность кратона периодически опускается и поднимается, образуя систему осадочных бассейнов. Продолжительность развития бассейнов определяется временем существования зоны колебаний, которое оценивается в 400 млн лет (приблизительно два периода термоконвективных волн). Эта оценка соответствует геологическим данным об Уиллистонском бассейне (этот пример бассейна рассмотрен в работе [8]), который раз-

вивался от раннего ордовика (500 млн лет назад) до среднего мела (100 млн лет назад).

Любое малое стохастическое возмущение рельефа земной поверхности (или температуры в литосфере) генерирует малоамплитудные термоконвективные волны. Для объяснения образования и эволюции осадочных бассейнов нужны термоконвективные волны с достаточно большими амплитудами. Такие волны возбуждаются достаточно большими начальными возмущениями, происхождение которых можно связать с поднятиями в орогенных поясах, окружающих кратоны. Можно предположить, что эти поднятия вызваны столкновением каких-либо двух континентальных литосферных плит. При таком столкновении изменяется вся глобальная картина движений литосферных плит, а на границах между континентальными плитами возникают надвиги, которые ведут к утолщению коры, поднятию и образованию горных цепей (орогенезу). В то же время, происходит глобальная переориентация мантийных течений, в результате которой возникает новая глобальная картина движения литосферных плит и начинается новый тектонический цикл. Типичная длительность такого тектонического цикла – порядка 200 млн лет. Пакеты термоконвективных волн, возбуждаемых в орогенных поясах, распространяются внутрь кратона, встречаются в его центральной части и создают зону термоконвективных колебаний в литосфере и систему осадочных бассейнов над этой зоной. Поскольку размер кратона – порядка 2000 км, а групповая скорость термоконвективных волн – около 0.15 см/год, пакеты термоконвективных волн распространяются от границы кратона к его центру за 660 млн лет. Развиваемая теория связывает, таким образом, происхождение бассейнов с горообразованием, которое происходило на границах кратона почти за 700 млн лет до образования осадочных бассейнов.

Приложение

1. К выводу уравнения (61)

Решая уравнение (49) при малом s , находим

$$q_j^2 = k^2 + p_j, \quad p_j = (-1)^{1/3} (\text{Ra} k^2 s^{2/3})^{1/3}. \quad (\text{П } 1)$$

Поскольку $(-1)^{1/3}$ принимает значения $(1 + i\sqrt{3})/2$, -1 и $(1 - i\sqrt{3})/2$,

$$\sum_{j=1}^3 p_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 p_j^2 = 0, \quad \sum_{j=1}^3 P_j p_j = 0. \quad (\text{П } 2)$$

В окрестности точки $s = 0$ получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 q_j &= k[1 + (p_j/k^2)]^{1/2} = k + (p_j/2k) - (p_j^2/8k^3) + (p_j^3/16k^5) + \dots, \\
 Q_1 &= k^2(\text{Rak}^2)^{2/3}s^{4/9}(-3 - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}\text{Rak}^2s^{2/3} + \dots, \\
 Q_2 &= k^2(\text{Rak}^2)^{2/3}s^{4/9}i2\sqrt{3} + i\sqrt{3}\text{Rak}^2s^{2/3} + \dots, \\
 Q_3 &= k^2(\text{Rak}^2)^{2/3}s^{4/9}(3 - i\sqrt{3}) + i\sqrt{3}\text{Rak}^2s^{2/3} + \dots, \\
 Q &= i3\sqrt{3}\text{Rak}^2s^{2/3} + \dots, \\
 \sum_{j=1}^3 P_j p_j^2 &= -i3\sqrt{3}\text{Rak}^2s^{2/3} + \dots, \quad \sum_{j=1}^3 p_j^3 = -3\text{Rak}^2s^{2/3} + \dots,
 \end{aligned} \tag{П 3}$$

где q_j разложено до третьей степени p_j в силу равенств (П 2).

В результате

$$\begin{aligned}
 \text{sh}q_j z / \text{sh}q_j &= (\text{sh}kz / \text{sh}k) \{1 + a_j(z \coth kz - \coth k) + \\
 &+ (a_j^2/2)[z^2 - 1 + 2(1 - z)\coth^2 k] + (a_j^3/6)[z^3 \coth kz - \coth k + \\
 &+ 6\coth^2 k(z \coth kz - \coth k) + 6\coth k - 3z \coth kz - 3z^2 \coth k]\}, \tag{П 4}
 \end{aligned}$$

где $a_j = (p_j/2k) - (p_j^2/8k^3) + (p_j^3/16k^5)$.

Подставляя (П 1)–(П 4) в (54), находим разложение лапласовского изображения вертикальной скорости в окрестности $s = 0$

$$\begin{aligned}
 V_z^*(s, z)|_{s \approx 0} &= -Z_0(\text{sh}kz / \text{sh}k)[1 - kz \coth kz + \\
 &+ k \coth k - (\text{Ras}^{2/3}/16k^3)F_1(k, z)] + \\
 &+ (\Xi_0 - Z_0)(\text{sh}kz / \text{sh}k)(\text{Ras}^{2/3}/8k^3 a)F_2(k, z), \tag{П 5}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_1(k, z) &= z \coth kz - \coth k - k[z^2 - 1 + 2(1 - z)\coth^2 k] + \\
 &+ (k^2/3)[z^3 \coth kz - \coth k + 6\coth^2 k(z \coth kz - \coth k) + \\
 &+ 6\coth k - 3z \coth kz - 3z^2 \coth k], \\
 F_2(k, z) &= z \coth kz - \coth k - k[z^2 - 1 + 2(1 - z)\coth^2 k].
 \end{aligned}$$

Функции $F_1(k, z)$ и $F_2(k, z)$ обращаются в нуль при $z = 1$. Первый член разложения $V_z^*(s, z)$ в окрестности $s = 0$ не зависит от r , но малый параметр r появляется в следующих членах разложения.

Приложение

2. О нулевом приближении по $1/\varphi$

Граничное условие (25), которое было использовано для нахождения смещения земной поверхности ξ , справедливо в нулевом приближении по $1/\varphi$. Если не считать $1/\varphi$ равным нулю, для определения ξ следует использовать граничное условие (22), в котором $-p + \sigma_{zz}$ определено в рамках нулевого приближения по $1/\varphi$ и r . Как следует из (38) и (62),

$$-P^* + \Sigma_{zz}^* = sF(s)[3D - (D^3/k^2)]U_z^*. \quad (\text{П } 6)$$

При $z = 1$ уравнения (80) и (84) дают

$$-P + \Sigma_{zz} = -(i\omega_m)^{1/3}[3 + (\pi^2/k_m^2)]\pi U. \quad (\text{П } 7)$$

Затем из (22) получаем

$$\Xi = \{-r\delta\pi + (1/\varphi)(i\omega_m)^{1/3}[3 + (\pi^2/k_m^2)]\pi\}U. \quad (\text{П } 8)$$

Модуль второго члена в фигурных скобках, в которое входит $1/\varphi$ оценивается как 0.01, а первый член $r\delta\pi \approx 0.1$. Следовательно, второй член, связанный с реологией, можно опустить.

Исследуя термоконвективные колебания литосферы, автор данной статьи в [8] не учитывал скачок плотности на границе Мохо. Для этого случая, положив $r = 0$ и используя оценку $\varphi = 3 \cdot 10^3$, находим

$$\begin{aligned} |\Xi|/|U| &= (1/\varphi)(\omega_m)^{1/3}[3 + (\pi^2/k_m^2)]\pi \approx 0.01, \\ \Delta H/|\Xi| &= 2a_s(k_m^2/\omega_m) \approx 5, \quad |U|/(\xi_0 \approx 0.4). \end{aligned} \quad (\text{П } 9)$$

Из уравнений (П 9) следует, что для получения 1 км осадков за полупериод колебаний амплитуда вертикального смещения на глубине 100 км должна быть равной 20 км, а амплитуда топографии остается равной 200 м, как и при $1/\varphi = 0$, $r = 0.15$. В этом случае начальная высота горного пояса должна была бы составлять около 50 км, что, конечно, слишком много.

Как следует из (П 8), депрессии земной поверхности расположены над восходящими термоконвективными течениями в литосфере (Ξ и U имеют противоположные знаки в нулевом приближении по $1/\varphi$). Однако, если $r = 0$, возмущение топографии Ξ сдвинуто по фазе на $\pi/6$ по отношению к вертикальному смещению U в литосфере, поскольку $i^{1/3} = \exp(i\pi/6)$.

Таким образом, учет скачка плотности на границе Мохо оказывается очень важным для термоконвективной теории происхождения осадочных бассейнов.

Отказываясь от приближения $1/\varphi = 0$, следует использовать граничное условие (22) вместо (25). Тогда в нулевом приближении по δ приходим к граничному условию при $z = 1$:

$$\left[1 + \frac{(s + ak^2)s^{1/3}}{(s + rak^2)\varphi} \left(3D - \frac{D^3}{k^2} \right) \right] V_z^* = -\Xi_0 + r \frac{s + ak^2}{s + rak^2} (\Xi_0 - Z_0), \quad (\text{П } 10)$$

которое обобщает первое из условий (47) на случай, когда $1/\varphi \neq 0$.

При малых s ($|s| \ll rak^2$),

$$\frac{r(s + ak^2)}{s + rak^2} = 1 - \frac{s}{rak^2} + \dots \quad (\text{П } 11)$$

При больших s ($|s| \gg rak^2$),

$$\frac{r(s + ak^2)}{s + rak^2} = r + \frac{rak^2}{s} + \dots \quad (\text{П } 12)$$

Уравнения (П 11) и (П 12) выписаны для случая, когда $r \ll 1$.

При больших s , для которых $|s| \gg (Ra k^2 / (\pi^2 + k^2)^2)^3$, уравнение (39) сводится к

$$(D^2 - k^2)^2 V_z^* = 0, \quad (\text{П } 13)$$

а граничные условия принимают вид

$$V_z^* = D^2 V_z^* = D^4 V_z^* = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (\text{П } 14)$$

$$(D^2 + k^2) V_z^* = 0 \quad \text{при } z = 1. \quad (\text{П } 15)$$

Помимо условия (П 15), на верхней границе имеет место условие (П 10).

Решение уравнения (П 13), удовлетворяющее граничным условиям (П 10), (П 14) и (П 15), выписывается в виде

$$V_z^*(z, k, s) = -f_0(z, k) \frac{\Xi_0 + r(Z_0 - \Xi_0)}{1 + (s^{1/3}/\varphi) 2kB(k)}, \quad (\text{П } 16)$$

где

$$B(k) = \coth k + (k/\text{sh}^2 k) = -(2k + \text{sh} 2k)/(1 - \text{ch} 2k),$$

$$f_0(z, k) = (\text{sh} kz / \text{sh} k) [1 - kz \coth kz + k \coth k].$$

При выводе уравнения (П 16) использовано разложение (П 12), в котором сохранен только первый член. Как следует из (П 16), при $|s| \ll (\varphi/2kB)^3$

$$U_z^*(z, s, k) = V_z^*/s =$$

$$= -[\Xi_0 + r(Z_0 - \Xi_0)] f_0(z, k) \left[\frac{1}{s} - \frac{s^{-2/3}}{\varphi} 2kB(k) + \dots \right]. \quad (\text{П } 17)$$

Обращение лапласовского изображения (П 17) дает

$$U_z(z, t, k) = -[\Xi_0 + r(Z_0 - \Xi_0)]f_0(z, k) \left[1 - \frac{2kB(k)}{\varphi\Gamma(2/3)t^{1/3}} + \dots \right]. \quad (\text{П } 18)$$

Уравнение (П 17) получено для значений s , лежащих в диапазоне

$$(\text{Ra } k^2 / (\pi^2 + k^2)^2)^3 \ll |s| \ll (\varphi/2kB)^3. \quad (\text{П } 19)$$

Согласно свойствам преобразования Лапласа, из ограничения (П 19) следует, что уравнение (П 18) справедливо во временном диапазоне

$$(2kB/\varphi)^3 \ll t \ll ((\pi^2 + k^2)^2 / \text{Ra } k^2)^3. \quad (\text{П } 20)$$

При $k = k_m$ и приведенных выше оценках Ra и φ , временной диапазон (П 20) принимает вид: $10^{-8} \ll t \ll 2 \cdot 10^{-2}$. Напомним, что здесь используется масштаб времени $d^2/\varkappa \approx 1.3 \cdot 10^9$ лет.

Уравнение (П 18) описывает последнюю стадию процесса установления изостатического равновесия: член, содержащий время, в этом уравнении много меньше 1 для t , лежащих в диапазоне (П 20). Для таких времен вертикальное смещение на верхней границе можно записать как

$$U_z(1, t) = -[\Xi_0 + r(Z_0 - \Xi_0)]. \quad (\text{П } 21)$$

Подставляя (П 16) в (41) и (42), нетрудно показать, что в диапазоне (П 20) смещения земной поверхности и границы Мохо имеют вид:

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= -r(Z_0 - \Xi_0), \\ Z(t) &= (1 - r)(Z_0 - \Xi_0). \end{aligned} \quad (\text{П } 22)$$

Начальное возмущение топографии вызывает течение в литосфере, которое ведет к восстановлению изостатического равновесия и создает смещения, описываемые уравнением (П 18), во внутренних областях литосферы. Эти смещения, величина которых того же порядка, что начальные возмущения верхней поверхности, возбуждают термоконвективные волны в литосфере. Характерное время установления изостазии $(2kB/\varphi)^3$ много меньше, чем период термоконвективных колебаний. В нулевом приближении по $1/\varphi$ установление изостазии происходит мгновенно. Отметим, что в нулевом приближении по r (скачок плотности на границе Мохо не принимается во внимание) процесс установления изостазии сводится к установлению плоской горизонтальной верхней границы $z = 1$.

Если начальное смещение границы изостатически скомпенсировано, т.е. $[\Xi_0 + r(Z_0 - \Xi_0)] = 0$, то правые части уравнений (П 17) и (П 18) обращаются в нуль. В этом случае, используя второй член разложения (П 12), находим:

$$U_z^*(z, s, k) = \Xi_0 f_0(z, k) \frac{ak^2}{s} \left[\frac{1}{s} - \frac{s^{-2/3}}{\varphi} 2kB(k) + \dots \right], \quad (\text{П 23})$$

$$U_z(z, t, k) = \Xi_0 f_0(z, k) ak^2 \left[\frac{t}{\Gamma(2)} - \frac{2kB(k)}{\varphi \Gamma(5/3)} t^{2/3} + \dots \right]. \quad (\text{П 24})$$

Уравнение (П 24), справедливое, как и (П 18), во временном диапазоне (П 20), показывает, что в этом диапазоне смещения возрастают и, следовательно, процесс установления изостазии продолжается.

Рассматривая малые s ($|s| \ll rak^2$), соответствующие большим временам $t \gg 1/rak^2$, и используя разложение (П 11), получаем в нулевом приближении по параметру δ

$$V_z^*(s, z) = c_{-1}(s - i\omega)^{-1} + Z_0 f_0(z, k) [1 - 2kB(k)(s^{1/3}/r\varphi)] + b_1 s^{2/3} + \dots, \quad (\text{П 25})$$

где функции $f_0(z, k)$ и $B(k)$ определены выше. Разложение (П 25) обобщает разложение (60) на случай, когда $1/\varphi \neq 0$. Обращая преобразование Лапласа, находим асимптотические разложения, справедливые на больших временах:

$$V_z(t, z) = c_{-1} \exp(i\omega t) - \Sigma_0 f_0 2kBt^{-4/3}/r\varphi \Gamma(-1/3) + b_1 t^{-5/3}/\Gamma(-2/3) + \dots, \quad (\text{П 26})$$

$$U_z(t, z) = (c_{-1}/i\omega) \exp(i\omega t) - Z_0 f_0 + Z_0 f_0 2kBt^{-1/3}/r\varphi \Gamma(2/3) + b_1 t^{-2/3}/\Gamma(1/3) + \dots. \quad (\text{П 27})$$

Напомним, что коэффициенты c_{-1} , f_0 и b_1 в уравнениях (П 25)–(П 27) зависят от z и обращаются в нуль на верхней границе $z = 1$. Однако рельеф граничной поверхности определяется, согласно (68), производными данных коэффициентов по z . Эти производные отличны от нуля при $z = 1$.

Уравнения (П 25)–(П 27) справедливы при любых значениях Ξ_0 и Z_0 . В случае начальной изостазии Z_0 и Ξ_0 связаны уравнением (89). При начальной изостазии рост смещений во внутренних областях литосферы вызван эрозией. Характерное время $1/rak^2$ этого процесса – около $1/3$ при $k = k_m$. В правой части уравнения (П 26) член, содержащий $1/\varphi$, много меньше, чем следующий член, если не рассматривать очень большие времена ($t \gg 10$), превышающие возраст Земли. Таким образом, нулевое приближение по $1/\varphi$, которое приводит к уравнениям (60)–(65),

можно использовать на временах, не слишком малых и не слишком больших по сравнению с периодом термоконвективных колебаний.

В рассматриваемой задаче о термоконвективных колебаниях, возбуждаемых начальным возмущением рельефа земной поверхности, помимо периода колебаний $2\pi/\omega_m \approx 1/5$, есть еще три характерных времени, отсчитываемых от момента начального возмущения и описывающих переходные процессы. Первое из них определяет период установления изостазии, второе – период, в течение которого тепловые эффекты пренебрежимо малы, третье – период эрозии. В случае, когда начальное возмущение нарушает изостазию, большие смещения внутри литосферы, которые возбуждают термоконвективные волны, создаются в течение относительно короткого периода установления изостазии. Если начальное возмущение топографии изостатически скомпенсировано, большие смещения в литосфере создаются в течение периода эрозии, т. е. значительно медленнее, чем в случае, когда нет начальной изостазии.

Члены, убывающие во времени, в правых частях равенств (П26) и (П27) описывают переходные процессы. Процесс установления конвекции в среде с реологией Андраде не имеет аналога в случае ньютоновской жидкости, поскольку $s = 0$ не является особой точкой в случае ньютоновской среды, а для среды Андраде $s = 0$ – точка ветвления. Процесс установления изостазии, напротив, имеет аналог в случае ньютоновской жидкости, где этот процесс описывается экспоненциальной, а не степенной зависимостью от времени [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vail P.R., Mitchum R.M., Thompson S.* Global cycles of relative changes of sealevel // *Amer. Assoc. Pet. Geol. Mem.* 1977. Vol.26. P.83–97.
2. *Sleep N.H.* Platform subsidence mechanisms and "eustatic" sea-level changes // *Tectonophysics.* 1976. Vol.36. P.45–56.
3. *Quinlan G.M.* Models of subsidence mechanisms in intracratonic basins and their applicability to North American examples // *Sedimentary Basins and Basin-Forming Mechanisms.* Canadian Society of Petroleum Geologists. Memoir. 1987. Vol.12. P.463–481.
4. *Aubry M.-P.* Sequence stratigraphy: Eustasy or tectonic imprint ? // *J. Geophys. Res.* 1991. Vol.96. P.6641–6680.
5. *Bond G.C., Kominz M.A.* Disentangling middle Paleozoic sea level and tectonic events in cratonic margins and cratonic basins of North America // *J. Geophys. Res.* 1991. Vol.96. P.6619–6640.
6. *Sloss L.L.* The tectonic factor in sea level change: A countervailing view // *J. Geophys. Res.* 1991. Vol.96. P.6609–6618.
7. *Watts T.* The formation of sedimentary basins // *Understanding the Earth.* Cambridge: Cambridge University Press, 1992. P.301–324.

8. *Birger B.I.* Rheology of the Earth and thermoconvective mechanism for sedimentary basins formation // *Geophys. J. Inter.* 1998. Vol.134. P.1–12.
9. *Birger B.I.* Excitation of thermoconvective waves in the continental lithosphere // *Geophys. J. Inter.* 2000. Vol.140. P.24–36.
10. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves. N. Y.; London; Sydney; Toronto: John Wiley and sons, 1974. 636 p.
11. *Flemings P.B., Jordan T.E.* A synthetic stratigraphic model of foreland basin development // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol.94. P.3851–3866.
12. *Beaumont C.* Foreland basins // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1981. Vol.65. P.291–329.
13. *Von Doetsch G.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation. Munchen: Springer, 1967. 365 p.
14. *Birger B.I.* Rheology of the Earth's mantle and geodynamical processes // *Geophys. Res. Lett.* 1991. Vol.18. P.2031–2034.