

**I. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ:
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
ОПИСАНИЯ**

**I. THE EARTH'S MAGNETIC FIELD:
MATHEMATICAL METHODS FOR
DESCRIPTION**

КАК ВОССТАНОВИТЬ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ ЕГО ИЗМЕРЕНИЙ?

А.В. ХОХЛОВ

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

В статье рассматриваются две известные проблемы восстановления магнитного поля \mathbf{B} Земли по данным измерений одной лишь интенсивности или одних только направлений. Доказаны несколько теорем, обеспечивающих единственность восстановления. Ведущиеся сейчас исследования палеомагнитных данных опираются на измерения, содержащие только направления. Параметры, задающие направления, являются нелинейными функциями вектора самого поля, измерения не покрывают всей поверхности Земли, поэтому статистические методы обработки таких данных нетривиальны. Как правило для статистического моделирования палеомагнитного поля вводилась упрощения (линейность, отсутствие корреляций по направлениям и т.д.), которые однако для сколь-нибудь сложной ситуации выглядят чрезмерными. В статье предлагаются прямые статистические методы для поиска адекватных моделей по имеющимся данным направлений.

HOW CAN ONE FIND THE EARTH'S MAGNETIC FIELD FROM INCOMPLETE MEASUREMENTS OF IT?

A.V. KHOKHLOV

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

This study considers two well-known problems arising in the determination of the Earth's magnetic field from measurements of intensity alone or field directions alone. Several theorems have been proved to demonstrate the uniqueness. Current studies of paleomagnetic data are based on measurements that contain directions alone. The parameters that specify the directions are nonlinear functions of the field vector itself, the measurements do not cover the entire surface of the Earth, hence the statistical methods for dealing with such data are nontrivial. As a rule, simplifications were used for statistical modeling of the paleomagnetic field; the simplifications include linearity, no correlation among the directions etc.), these being oversimplifications for a moderately complex situation. This paper suggests straightforward statistical methods to search for appropriate models based on available directional data.

Содержание

1. Введение	6
2. Обозначения и соглашения	16
3. Восстановление поля по интенсивностям на поверхности	18
4. Восстановление поля по направлениям на поверхности	33
5. Статистические модели поля направлений	36
Литература	51

1. Введение

Статья посвящена проблеме восстановления пространственного описания наблюдаемого магнитного поля Земли по данным его частичных измерений на некоторой поверхности – на земной поверхности, или, если речь идет об измерениях со спутников, некоторой поверхности в околоземном пространстве. Рассматриваются два широко известных на практике случая, когда результатом измерения поля в точке поверхности является не сам вектор, а либо только его модуль (=длина), либо только направление вектора. Первый случай возникает при обработке геомагнитных наблюдений, получаемых с датчиков, установленных на искусственных спутниках Земли; второй случай соответствует палеомагнитным данным. Математический формализм, типичный для такого рода задач, состоит в исследовании уравнения (решением которого является магнитное поле) с краевым условием, отвечающим данным измерений. Кроме того, в статье рассмотрена задача *статистического* моделирования палеомагнитного поля по данным одних только его направлений – здесь подразумевается иной формализм и иной порядок точности (во всяком случае, по состоянию на сегодняшний день).

Упомянутые два ограничения на данные не позволили тривиально свести проблему к классическим краевым задачам; за последние примерно 40 лет математически ясное обоснование метода работы с такого рода неполными данными так и не появилось, несмотря на неоднократные попытки его найти (см. подробный обзор идей и методов в [Lowe et al., 1995]). Соответствующая полная математическая теория для этих задач никогда не была изложена, наиболее близкой изученной областью является теория краевых задач с косо́й производной. Отметим, что соответствующий аналог задач восстановления для двумерного случая допускает естественную переформулировку в терминах свойств голоморфных функций комплексной переменной и неплохо изучен; в частности, с ним связана одна из проблем Гильберта. Однако не вполне понятно, как именно, и обобщаются ли вообще, соответствующие дву-

мерные результаты об условиях существования и единственности решений на физически осмысленный трехмерный случай. Тем не менее надо отметить, что изучение двумерного случая позволяет построить некоторые примеры осесимметричных трехмерных полей, для которых данные по направлениям заведомо неоднозначно определяют само магнитное поле.

Всюду в настоящей работе под магнитным полем понимается *главное* магнитное поле Земли [Яновский, 1978], т.е. часть наблюдаемого магнитного поля в некоторых геофизически интересных пространственно-временных масштабах без учета воздействия внешних (по отношению к ограниченной поверхностью части пространства) источников. Как известно [Яновский, 1978], эффект, создаваемый внешними источниками, много меньше главного магнитного поля Земли. Еще одно стандартное предположение заключается в гипотезе отсутствия токов через поверхность наблюдений (напомним, что это есть либо земная поверхность, либо некоторая поверхность, объемлющая Землю – например, поверхность, заметаемая траекториями измеряющего спутника в космосе).

Хорошо известно, что в исследованиях магнитного поля Земли рассматриваются не сами классические уравнения Максвелла, а некоторая их модификация, связанная с характерным масштабом наблюдений – так называемые *до-максвелловские уравнения*. В разделе 2 приведен вид этих уравнений и основные идеи их вывода (следуя материалу книги [Backus et al., 1996]). Вид решений до-максвелловских уравнений при отсутствии токов позволяют рассматривать магнитное поле как потенциальное в неограниченной части пространства (внешней по отношению к замкнутой поверхности наблюдений). При этом (скалярный) потенциал этого поля оказывается гармонической в этой части пространства функцией, т.е. решением классического уравнения Лапласа

$$\Delta U = 0.$$

Таким образом, основной случай для рассмотрения – это трехмерное уравнение Лапласа в неограниченной области пространства с некоторыми краевыми условиями на градиент. Значимыми для проблем геомагнетизма решениями потенциала являются те, градиент которых достаточно быстро убывает на бесконечности

$$|\nabla U(x)| \sim |x|^3, \quad |x| \rightarrow \infty$$

[Яновский, 1978; Proctor, Gubbins, 1990], ибо магнитное поле не содержит монополя. Для краткости (хоть это и не вполне корректно) в этой

статье градиентные поля гармонических потенциалов в \mathbb{R}^3 будут называться *гармоническими векторными полями*.

Дальнейшие уточнения математического формализма, в частности, предположений о поверхности наблюдений и о поле, будут даны в соответствующих разделах статьи; здесь же дан лишь краткий обзор проблематики и необходимые ссылки на имеющиеся публикации.

1.1. Использование данных об интенсивности магнитного поля

С начала и на протяжении достаточно длительного периода спутниковых измерений с хорошей точностью (порядка $1nT$) измерялась лишь величина модуля вектора поля. Причины такого положения были чисто технологические – скалярный магнитометр достаточно прост и надежен, система ориентации прибора, напротив, весьма сложна. В настоящее время ситуация изменилась: появились искусственные спутники, осуществляющие одновременные измерения всех трех компонент магнитного поля (в системе неподвижных звезд), хотя вопрос об интерпретации накопленных чисто модульных данных так и не снят. До сих пор существует также значительная разница в сложности организации векторных наблюдений из космоса по сравнению с модульными наблюдениями: система ориентации магнитометра не вполне надежна и пока что весьма дорогостояща. Помимо этого усложняется вопрос калибровки в реальном времени векторного магнитометра [Gravand et al., 2001]. Все это позволяет считать проблему использования чисто-модульных данных по-прежнему актуальной, во всяком случае, по состоянию дел на последнее десятилетие.

Первая из рассматриваемых в статье теоретических задач есть проблема эффективного описания магнитного поля по данным величины модуля этого поля на поверхности. По-видимому, впервые эта задача была упомянута четыре десятилетия назад в статье [Zmuda, 1958], девять лет спустя Дж. Бакус [Backus, 1968] постарался максимально разобраться в теоретической стороне дела, он же позже [Backus, 1970] указал на имеющуюся здесь принципиальную трудность – *неединственность восстановления поля в общем случае по чисто модульным данным на поверхности*. Дж. Бакус построил явный (в смысле разложения по сферическим гармоникам) пример двух существенно (т.е. не сводящихся к умножению на -1) разных гармонических векторных полей во внешней к единичному шару области, таких, что длины этих векторных полей совпадают всюду на поверхности сферы. Несмотря на заинтересованность специалистов, удовлетворительного описания возможной неединственности (т.е. хорошо обоснованного и достаточно

простого для практических приложений метода) так и не было никем предложено; поиск такового остался хорошо известной, но так и не решенной задачей (см., например, обзор состояния дел на 1995 г. в статье [Loves et al., 1995] и не попавшую в этот (геофизический) обзор более математизированную статью [Maganini, 1987]).

Общепринятым представлением магнитного поля является разложение магнитного потенциала (соглашения магнитостатики обеспечивают потенциальный характер магнитного поля вне земной поверхности) в ряд Гаусса, т.е., иными словами, гармоническая функция-потенциал отождествляется со своим разложением по сферическим гармоникам в некотором фиксированном базисе. В заведомо далеком от реальности идеализированном предположении *конечности* этого разложения (т.е. в ряде Гаусса используется лишь конечное число сферических гармоник) теоретическая неединственность также исчезает.

Разумеется, на практике ограничиваются представлением потенциала в виде суммы конечного числа сферических гармоник, однако это совсем не то же самое, что поиск решения в классе конечных разложений. В частности, при вычислении стандартными методами (см., например, Press et al., 1996) начальных членов разложения потенциала в ряд Гаусса (поиском коэффициентов, удовлетворяющих граничным условиям на модуль градиента) возникает неконтролируемо большая ошибка соответствующего векторного поля¹, особенно в зоне географического экватора – это так называемый ”Бакус-эффект”. Неоднократные попытки оценить и преодолеть ”Бакус-эффект” достаточно отражены в литературе, вот ключевые ссылки: [Barracough, Nevitt, 1976; Hurwitz, Knapp, 1974; Loves, 1975; Loves, Martin, 1987; Stern, Bredekamp, 1975; Ultré et al., 1998].

Заметим, что в случае измерений не на поверхности, а в, пусть даже малом, объеме проблема единственности сводится к изучению возможности аналитического продолжения в силу аналитичности гармонических потенциалов и локальной аналитичности выражения длины градиента (см. также [Backus, 1974]). Впрочем возможность практического использования этого результата выглядит все еще не вполне ясно².

До сих пор никаких обоснованной теории для объяснения упомянутого эффекта не было получено; в указанных статьях была выдвинута эмпирическая рекомендация добавлять к модульным данным в приэква-

¹Т.Бондарь показала (неопубликовано), что стандартно используемые алгоритмы восстановления векторного поля ведут себя неустойчиво, если в качестве исходных данных использовать интенсивность векторного поля, доставляемого примером Бакуса.

²При этом известно, что чисто-скалярные данные, полученные со спутников со значительной вариацией траекторий, дают относительно меньший ”Бакус-эффект”.

ториальной зоне векторные и использовать новые смешанные данные для определения коэффициентов ряда Гаусса стандартными методами – такой метод дает значительное увеличение точности ответа. Никаких теоретических оценок точности не было дано, были попытки эмпирически оценить [Holme, Bloxham, 1995] зависимость точности результата от размеров области, в которую добавлены дополнительные векторные данные и точности этих данных.

В статье найдены удобные, с прикладной точки зрения, условия единственности восстановления поля: оказывается, для этого достаточно к модульным данным добавить нулевую изодину вертикальной составляющей поля, иными словами, координаты линии, где магнитное поле касается поверхности наблюдений (эта линия также известна как *магнитный экватор*). Решение оказывается при этом устойчивым по отношению к точности измерений как модуля, так и магнитного экватора – эффектов неконтролируемых ошибок восстановления векторных значений не возникает [Khokhlov et al., 1999].

Соответствующая задача теории уравнений с частными производными – краевая задача для уравнения Лапласа с условиями на модуль градиента – несколько известно автору в математической литературе была инициирована упомянутой статьей Г.Бакуса [Backus, 1970]) и исследовалась позже (без особого продвижения в значимой для геофизики части) [Magnanini, 1987; Payne, Schaefer, 1993]. Задача дает интересный пример взаимодействия чистой математики и прикладных областей, таких, как выбор способа экономных измерений поля. Практический смысл полученного здесь результата состоит в том, что положение магнитного экватора – достаточно хорошо изученная вещь, требующая замеров в сравнительно узкой широтной полосе; необходимые измерения могут быть проведены, например, с самолета. Практически важной является контролируемая ошибка ответа (т.е. собственно векторного поля), величина которой зависит от точности измерения модуля и точности определения магнитного экватора. При этом никаких специальных предположений о характере ошибок измерения (например, предположений об их статистических свойствах) не требуется. В частности, воздействие внешних источников поля может быть включено в указанные ошибки измерения.

Явное выражение этой зависимости точности восстановления поля от точности измерения положения магнитного экватора позволяет объяснить ранее найденный [Holme, Bloxham, 1995] эмпирический эффект ”неожиданно большого увеличения точности ответа” при добавлении к модульным данным в экваториальной зоне не слишком точных векторных данных – это следует из формул оценок ошибки. Действительно,

частичные векторные данные в районе географического экватора могут нести с достаточной точностью информацию о положении *магнитного экватора*.

1.2. Использование данных о направлениях магнитного поля

Одной из главных задач архео- и палеомагнитных исследований является построение модели поля для различных исторических и геологических эпох. Типичные данные при этом характеризуются сравнительно малой точностью, причем в подавляющем большинстве случаев измерения состоят только из склонения и наклонения поля без интенсивности, т.е. такие данные отвечают полю направлений (с ориентациями или же без оных). Разумеется, модель векторного поля, построенная по этим данным, будет неоднозначна, именно – всегда возможно умножить все вектора на константу (положительную константу, если направления даны с ориентацией). Однако непонятной оставалась полная степень неоднозначности модели, для краткости будем называть эту проблему гипотезой единственности (= единственности с точностью до мультипликативной константы). Публикации на эту тему до последнего времени разделялись между попытками [Proctor, Gubbins, 1990] привести (численные) контрпримеры существенно различных гармонических потенциалов, которые задавали бы одно и то же поле направлений на поверхности Земли, и попытками доказать единственность в самом общем случае [Kono, 1976], но эти рассуждения содержали явные ошибки (см. комментарии в [Hulot, Khokhlov, Le Mouél, 1997]). Контрпример в [Proctor, Gubbins, 1990] состоял в предъявлении осесимметричного поля направлений, для которого имеются как минимум два гармонических поля, его изложение использовало не вполне очевидные утверждения о существовании решений довольно сложных рекуррентных уравнений с переменными коэффициентами. В самое последнее время R. Kaiser и M. Neudert [Kaiser, Neudert, 2003] сообщили автору о достигнутом ими прогрессе в классификации осесимметричных гармонических векторных полей, совпадающих как поля направлений. На сегодня условие строгой осевой симметрии поля является ключевым для построения контрпримеров и их классификации, к сожалению, эти строгие ограничения не отвечают реальным свойствам магнитного поля Земли.

Практическая значимость ответа о степени неединственности восстановления магнитного поля Земли по его полю направлений стимулировала поиск хороших естественных условий, при которых устойчивая единственность ответа (с точностью до умножения на константу) была бы гарантирована. Обзор этих попыток приведен в [Loves et al., 1995]. Как и в случае с модульными данными, здесь слишком уж много внима-

ния уделено далекому от практических применений и соображений общего положения условию конечности ряда Гаусса для потенциала. Отметим также, что при измерениях направлений в пространственном объеме, а не на поверхности, вопрос о неединственности снимается [Proctor, Gubbins, 1990].

Общее мнение ряда исследователей (см. [Barraclough, 1974]) сложилось все же в пользу того, что для случая реального магнитного поля (т.е. с характерными величинами членов ряда Гаусса) единственность восстановления (с точностью до умножения на константу) по наблюдениям на поверхности имеет место.

В статье предложено условие, представляющееся разумным для математической модели реального поля и гарантирующее единственность (с точностью до умножения на константу) восстановления векторного поля по соответствующему полю направлений. Для реального магнитного поля вклад дипольной компоненты является доминантным, в этом случае условие состоит в том, что потенциал поля имеет один невырожденный максимум и один невырожденный минимум на поверхности. Напомним, что невырожденным экстремумом называется тот, для которого матрица вторых частных производных (по координатам на поверхности) невырождена. Физические соображения в пользу справедливости указанного условия для палеомагнитных данных можно найти в совместной с Г.Уло и Ж.-Л. Ле Муелем геофизической статье на эту тему [Hulot, Khokhlov, Le Mouél, 1997]. При этом условии имеет место единственность (с точностью до умножения на константу) восстановления векторного поля по соответствующему полю направлений.

Условие можно проиллюстрировать геометрически как существование ровно одного Северного магнитного полюса и ровно одного Южного магнитного полюса – точек, где вектор поля перпендикулярен поверхности. Если же таких точек перпендикулярности (или более общо – связанных компонент множества, в которых направление поля перпендикулярно поверхности) ровно n , то имеет место оценка сверху числа свободных параметров, от которых зависит решение, – а именно, их число не превосходит $n - 1$.

Помимо необходимого обоснования теоретической единственности решения, в палеомагнетизме актуален также вопрос выбора метода нахождения коэффициентов ряда Гаусса для соответствующего магнитного потенциала. Дело в том, что (в отличие от измерений модуля магнитного поля) палеомагнитных данных обычно не слишком много и они не очень высокой точности. В этих условиях желательным является учет статистических свойств результатов измерений и, соответственно, описание ответа (т. е. коэффициентов ряда Гаусса) в статистических

терминах. Таким образом, такой метод должен опираться на свойства распределений случайных величин, принимающих не числовые значения, а значения в множестве направлений. Элементы соответствующей математической теории изложены, например, в [Mardia, 1972], однако не вполне ясно, как именно согласуются приведенные там распределения с употребительными сегодня статистическими описаниями магнитного поля.

Применяемые сегодня методы [Carlut, Courtillot, 1998; Courtillot et al., 1992; Kono, Tanaka, 1995; Kono et al., 2000; Wilson, 1971] выглядят иногда достаточно противоречиво: например, при нахождении коэффициентов Гаусса при недипольных членах использование VGP-метода (т.е. использование виртуальных полюсов – см. [Яновский, 1978]), означает, по сути, использование предположения, что все недипольные коэффициенты равны нулю. Распространено также мнение, что распределения направлений магнитного поля в данной точке всегда подчинены статистике Фишера, между тем, как будет показано в статье, это может противоречить принятому сегодня предположению о нормальном законе распределения коэффициентов при сферических гармониках в разложении магнитного потенциала. Таким образом, имеется явная необходимость простого и ясного описания статистических свойств измеряемых величин, исходя из известного статистического поведения магнитного потенциала.

В статье разобран употребительный сегодня при исследовании палеомагнитных данных случай, когда магнитный потенциал есть сумма независимых нормально распределенных гауссовских коэффициентов, умноженных на сферические гармоники. В этих условиях возможно дать явное описание закона распределения направлений магнитного поля (он зависит от выбранной на поверхности точки наблюдения) и указать критерии проверки соответствующих гипотез – оказывается, что широко известный критерий Колмогорова–Смирнова может быть без каких-то дополнительных предположений использован в случае проверки статистической достоверности параметров, задающих распределение направлений. В качестве несколько парадоксального результата применения изложенных в статье принципов укажем, что опубликованные модели палеомагнитного поля Земли [Constable, Parker, 1998; Quidelleur, Courtillot, 1996], а также модель [Johnson, Constable, 1999] проверки критерием Колмогорова–Смирнова не выдерживают – причины этого лежат в слабообоснованных методах обработки данных, по которым эти модели были найдены.

Статья включает в себя часть результатов автора, опубликованных в [Hongre et al., 1998; Hulot, Khokhlov, Le Mouël, 1997; Khokhlov et al.,

1997; Khokhlov et al., 1999; Khokhlov et al., 2001] и посвященных в основном следующему вопросу: как извлечь достоверную информацию о магнитном поле из данных, вообще говоря, не считавшихся достаточными для этого. Практические приложения (за исключением примеров из последнего раздела) разрабатываемых методов для конкретных моделей магнитного поля в различных эпохах – например, [Carlut, 1997; Carlut, Courtillot, 1998; Uttré et al., 1998] – в этой статье почти не отражены: эти результаты, гораздо более специальные, чем основной материал, и требуют аккуратного объяснения терминологии, используемой системы единиц, подробного описания используемых данных. Все это, без сомнения, не способствовало бы прояснению достаточно простого смысла математических построений. Таким образом, статья содержит математические утверждения, относящиеся к теории восстановления магнитного поля по его частичным наблюдениям, и все изложение построено на использовании безразмерных величин. Впрочем, случай перехода к именованным размерностным константам (в соответствующей системе единиц) делается стандартным образом (см. например, [Ultré et al., 1998]).

В разделе 2 статьи сформулированы основные соглашения и обозначения, необходимые для дальнейшего, в частности – краткое пояснение о до-максвелловских уравнениях.

Раздел 3 содержит ключевое для дальнейших построений утверждение. Оно соответствует необходимому для геофизики уточнению фольклорного³ Усиленного Принципа Максимума, гласящего, что гармоническая в области функция, имеющая свой максимум в точке, ограничивающей область поверхности, имеет в этой точке обязательно ненулевой градиент. Далее в разделе 3 доказана теорема единственности восстановления магнитного поля Земли по данным измерений его модуля на поверхности и магнитному экватору; доказана теорема сходимости (которая обеспечивает устойчивость решения); выведены формулы зависимости ошибки решения от ошибок измерения модуля и ошибок измерения координат магнитного экватора. В этом разделе для полноты картины также приведено гораздо более короткое прямое доказательство [Khokhlov et al., 1997] одной лишь единственности (т.е. без оценок сходимостей и ошибок), обобщающее известный результат Г. Бакуса для векторных полей специального вида (не включающих магнитное поле). Практический эксперимент использования теоремы единственности по данным спутников MAGSAT и POGO был недавно проведен П. Ультре с соавторами [Ultré et al., 1998], в настоящее время теми

³фольклорного – ибо не вполне понятно, кто его действительный автор: Бицадзе [Бицадзе, 1963], например, предполагает, что это Заремба; более распространена точка зрения, что автором является Е.Хопф.

же авторами проводится уточняющий анализ модульных данных, собранных CNES за длительное время.

В разделе 4 доказана теорема единственности (с точностью до мультипликативной константы) восстановления магнитного поля Земли по данным измерений поля направлений на поверхности при условии того, что поле имеет доминантный диполь. При этом рассмотрены случаи поля ориентированных и неориентированных направлений (ряд исследователей, в частности Дж.Бакус, полагают это различие практически важным).

В разделе 5 рассматриваются статистические свойства распределения направлений поля при условии того, что входящие в магнитный потенциал коэффициенты ряда Гаусса – независимые нормально распределенные случайные величины. Это условие (происходящее, по-видимому, из хорошо проверенного факта о гауссовости распределения самого магнитного вектора в точке) в настоящий момент является общим для большинства статистических моделей поля в палеомагнетизме⁴. Впрочем, из изложения совершенно ясно, как следует действовать в случае альтернативных гипотез о распределении коэффициентов ряда Гаусса.

Прикладное значение развитой теории для построения моделей поля таково: предположим, мы хотим определить параметры (среднее и дисперсию) нескольких начальных членов ряда Гаусса для магнитного потенциала, пренебрегая остальными членами разложения. Тогда, поскольку каждый набор параметров определяет известные распределения направлений, можно выбрать тот набор параметров, при котором совпадение таких теоретических распределений с наблюдениями будет наилучшим в смысле какого-либо статистического теста, например, критерия Колмогорова–Смирнова. Это дает новый метод (естественно считать его прямым методом восстановления – в смысле [Blakely, 1996]) поиска статистических параметров для членов ряда Гаусса; соответствующий алгоритм, будучи идейно несложным, тем не менее требует вычислительных усилий, – естественно реализовать его в виде компьютерной программы, набросок алгоритма которой также приведен. Такие программы моделирования были в свое время написаны автором и сначала Л.Онгр, а в самое последнее время Ж.Карлю и Г.Уло с помощью этих программ получили интересные уточнения моделей магнитного поля [Carlut, 1997; Hongre et al., 1998].

Постановку и актуальность всех рассмотренных здесь конкретных проблем автору рассказали сотрудники Лаборатории Геомагнетизма

⁴Но это же соглашение, однако, выглядит весьма сомнительно, если проверить его для имеющихся чисто-вычислительных моделей генерации магнитного поля Земли – таких, как Геодинамо Глацмайера-Робертса, например.

Парижского Института Физики Земли (IPGP): академик Жан-Луи Ле Муель, профессор Винсент Куртийо, доктор Готье Уло.

2. Обозначения и соглашения

2.1. Некоторые общие обозначения

Замкнутую гладкую поверхность, ограничивающую выпуклую область в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 (поверхность, на которой осуществляются измерения характеристик магнитного поля), обозначим через Σ , внешнюю по отношению к ней некомпактную часть трехмерного пространства обозначим через Ω . Единичный вектор внешней нормали к поверхности в точке x обозначим через $\mathbf{n}(x)$. Для некоторых рассуждений в дальнейшем нам также понадобится система ортогональных координат, будем предполагать, что ее начало лежит строго внутри части пространства, ограниченной поверхностью Σ , т.е. не в Ω .

Для того, чтобы не усложнять изложение детальным исследованием возможных краевых и предельных эффектов, будем рассматривать гармонические в чуть большей, чем Ω области $\Omega' \supset (\Omega \cup \Sigma)$ магнитные потенциалы (потенциальный характер рассматриваемых полей также, как и *гармоническое* свойство потенциала обеспечивается магнитоэстатической аппроксимацией), убывающие не медленнее степени $d \geq 1$ на бесконечности:

Условие убывания на бесконечности: для $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$|f(x)| < \left(\frac{K}{|x|} \right)^d.$$

Ограничив себя только приложениями геомагнетизма, можно считать, что $d = 2$.

Как правило, скалярные функции будут обозначены строчными латинскими буквами, векторнозначные функции на \mathbb{R}^3 будут выделены жирным шрифтом. Например, магнитное поле будет обозначаться через \mathbf{B} . Магнитные потенциалы в первых двух разделах будут обозначаться f , g и т.п.; там, где в последней главе речь пойдет о статистических моделях, магнитный потенциал будет обозначен уже иначе – прописной буквой V .

Модуль вектора будем обозначать так же, как и абсолютное значение скаляров – $|\cdot|$, необходимые же нормы в функциональных пространствах обозначим двойными вертикальными чертами $\|\cdot\|$. Остальные (как, впрочем, и перечисленные выше) обозначения – стандартные.

2.2. Магнитостатическая аппроксимация

Уравнения Максвелла (1) на компоненты электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{B} в ситуации изучения магнитного поля Земли принято трансформировать в более простую систему уравнений, идея этого упрощения требует некоторых технических деталей, которые можно найти, например, в монографии [Backus et al., 1996].

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В приложениях можно ограничиваться пространственно-временным масштабом (L, T) , тогда имеем соответствия по порядку величин:

$$|\nabla \times \mathbf{E}| \sim E/L, \quad |\nabla \cdot \mathbf{E}| \sim E/L, \quad |\partial_t \mathbf{E}| \sim E/T, \quad (2)$$

$$|\partial_t \mathbf{B}| \sim B/T, \quad |\nabla \times \mathbf{B}| \sim B/L, \quad |\nabla \cdot \mathbf{E}| \sim E/L. \quad (3)$$

С учетом уравнений (1) получается:

$$B/T \sim E/L, \quad |\partial_t \mathbf{E}| \sim (LB)/T^2, \quad (4)$$

$$\frac{1}{c^2} |\partial_t \mathbf{E}| / |\nabla \times \mathbf{B}| \sim \left(\frac{L/T}{c} \right)^2. \quad (5)$$

Масштаб исследуемых в геомагнетизме величин таков, что $L/T < llc$ (c – скорость света), следовательно, естественно будет пренебречь членом $\partial_t \mathbf{E}/c^2$ в уравнениях Максвелла. Корректность этого предположения следует доказывать – совсем не очевидно, что решения соответствующих ”до-максвелловских” уравнений имеют правильные по масштабу решения, которые аппроксимируют соответствующие решения уравнений Максвелла. Аккуратная проверка с использованием представления решений (1) в виде запаздывающих потенциалов показывает, что сделанное предположение корректно, детали можно найти в [Backus et al., 1996].

Далее, сравнивая порядки величин $\nabla \times \mathbf{B}$ и электропроводимость атмосферы, можно считать, что $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ в масштабах, имеющих значение для исследования магнитного поля Земли. Соответствующая система уравнений

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

в односвязной области трехмерного пространства влечет существование гармонической потенциальной функции для векторного поля \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = -\mathbf{grad} f, \quad \Delta f = 0. \quad (7)$$

Таким образом, вопрос о существовании того или иного поля в геомагнетизме сводится к классической задаче исследования гармонических функций в областях пространства \mathbb{R}^3 ; возникающие при этом краевые задачи, однако, не всегда могут быть решены явно. Стандартный прикладной метод восстановления гармонической функции по начальным условиям состоит в поиске подходящих коэффициентов разложения этой функции в некотором базисе (обычно – базисе сферических функций), этот поиск проводится обычно методом наименьших квадратов. На этом этапе существенно – единственно ли решение соответствующей задачи или нет, а также устойчивы ли решения.

Исследование единственности, тем самым, непосредственно связано с прикладными методами. Действительно, поиск неизвестных коэффициентов методом наименьших квадратов использует некоторую функцию расстояния между моделью и данными. Эта функция расстояния определяется, исходя из вида неполных данных (только направления или только интенсивности) и, значит, невозможно различить при помощи этой функции два модельных решения, у которых эти неполные данные совпадают. Таким образом, существование нескольких решений, отвечающих одним и тем же данным, приводит к тому, что функция расстояния (определенная на множестве параметров модели) заведомо имеет несколько одинаковых по значению минимумов, что при поиске решений методом градиентного спуска ведет к зависимости получаемого ответа от стартовой точки алгоритма. Это обстоятельство уместно называть неустойчивостью алгоритма.

3. Восстановление поля по интенсивностям на поверхности

3.1. Свойства гармонических потенциалов

Известный Принцип максимума [Владимиров, 1981] для гармонических функций гласит, что локальный максимум (или локальный минимум) непостоянной гармонической функции f не может находиться внутри открытой области. Следовательно, он может достигаться только в точке x_0 на границе указанной области.

С другой стороны, в случае компактной границы области этот максимум (минимум) функции в области является также и максимумом

(минимумом) среди значений функции на границе – напомним, что мы полагаем функцию гладкой и на границе области. Стало быть, можно рассмотреть градиент ∇f ; следующее свойство гармонических функций сравнительно хорошо известно:

Лемма 1. Рассмотрим градиент ∇f непостоянной гармонической в некоторой области функции f . В точке, где f достигает максимального (минимального) значения на ограничивающей эту область поверхности, градиент ∇f отличен от нуля.

(Доказательство можно найти в [Мизохота, 1977], а также см. ниже доказательство Леммы 3).

В интересном для нас случае области Ω нужен небольшой комментарий: поскольку область Ω содержит окрестность бесконечности, то как максимум так и минимум, вообще говоря, находятся либо на поверхности Σ , либо в бесконечности. Однако в нашей ситуации второй случай отпадает и это специфика именно магнитных потенциалов. Действительно, предположим противное: максимум (минимум) функции находится в бесконечности. Тогда, по Условию убывания получается, что функция f всюду в области Ω отрицательна (положительна); в частности, разлагая ее по сферическим гармоникам, видим, что доминантный по порядку $\|x\|$ член разложения на достаточно большой сфере не меняет знака и, значит, является монополюс с порядком убывания единица. Противоречие с Условием убывания.

Таким образом, и максимум и минимум в области Ω достигаются на поверхности Σ . Легко также видеть, что поскольку по предположению функция дифференцируема и на поверхности Σ , то градиент в указанных точках максимума и минимума перпендикулярен поверхности Σ .

3.2. Теорема единственности

Информации предыдущего раздела в общем уже достаточно для нужд раздела 4, а также для доказательства версии теоремы единственности восстановления поля по модулю и магнитному экватору на поверхности. Мы рассматриваем случай поверхности общего положения, следовательно, магнитный экватор состоит из одной или нескольких замкнутых кривых, разбивающих поверхность на области, где градиент направлен наружу или внутрь поверхности. При этом магнитный экватор разграничивает области, где проекции градиента на нормаль к поверхности имеет разные знаки.

Теорема 1 (Теорема единственности). Пусть две гармонические в области Ω' и удовлетворяющие Условию убывания функции f и g таковы, что на поверхности Σ совпадают длины $\|\nabla f\|$ и $\|\nabla g\|$ их градиентов, а также кривые магнитных экваторов M_f и M_g (где соот-

ветствующие градиенты касаются поверхности Σ). Тогда всюду в области Ω' либо $f = g$, либо $f = -g$.

Доказательство. Для начала, если это необходимо, изменим знак у одной из функций с тем, чтобы проекции градиента на нормаль к поверхности имели бы одинаковые знаки во всех областях, на которые разбивает магнитный экватор $M_f = M_g$ поверхность Σ . Теперь рассмотрим гармоническую функцию $h = f - g$. Очевидным образом она также не содержит монополя и, следовательно, ее максимум и минимум в области Ω также лежат на поверхности Σ .

Предположим, что максимум (минимум) функции h на поверхности Σ лежит вне магнитного экватора в одной из областей, где градиенты ∇f и ∇g имеют ненулевую (и одного знака, поскольку мы уже позаботились об этом) проекцию на внешнюю нормаль к поверхности. Таким образом, вектор $\nabla f + \nabla g = \nabla(f + g)$ также имеет ненулевую (и того же знака) проекцию на внешнюю нормаль. Кроме того,

$$(\nabla(f + g), \nabla(f - g)) = \|\nabla f\|^2 - \|\nabla g\|^2 = 0, \quad (8)$$

т.е. градиент $\nabla h = \nabla(f - g)$ ортогонален вектору, имеющему ненулевую проекцию на нормаль к поверхности. Отсюда следует, что градиент ∇h (если он ненулевой) не может быть перпендикулярен поверхности в точке предполагаемого максимума (минимума), и, следовательно, по Лемме 1 не может иметь максимумов (минимумов) вне магнитного экватора.

Однако в точке $x \in M_f = M_g$ градиент ∇h , если он ненулевой, тем более не перпендикулярен, а касателен поверхности, будучи разностью двух касательных к поверхности векторов ∇f и ∇g . Таким образом, функция h постоянна и равна нулю всюду на поверхности Σ , а стало быть и в области Ω' , поскольку ее максимум и минимум в Ω совпадают и равны нулю. Доказательство окончено.

Доказанная только что теорема ничего не говорит о том, насколько будут отличаться функции f и g и/или их градиенты, если длины градиентов не точно совпадают, а лишь достаточно близки и, аналогично, если кривые магнитных экваторов M_f и M_g близки, но вообще говоря, не совпадают. Из доказательства Теоремы 1 прямо это не следует.

В случае неограниченной области Ω и удовлетворяющей *Условью убывания на бесконечности* гармонической функции f Лемму 1 можно усилить. Полученное таким образом неравенство для градиента в точке максимума будет основным вспомогательным результатом, но вначале надо сформулировать, что именно понимается под словами *близкие магнитные экваторы* и *близкие интенсивности*.

3.3. Условия на вариации

Для определения близости магнитных экватора воспользуемся проекциями $B_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ вектора поля \mathbf{B} на вектор внешней нормали \mathbf{n} в каждой точке поверхности Σ .

Вариация магнитного экватора. Примем, что поверхность Σ представлена объединением трех подмножеств U_ε^+ , U_ε^- , U_ε^0 таких, что для некоторого (малого) $\varepsilon > 0$

- $x \in U_\varepsilon^+$, $B_n > \varepsilon$,
- $x \in U_\varepsilon^-$, $B_n < -\varepsilon$,
- $x \in U_\varepsilon^0$, $|B_n| \leq \varepsilon$.

Такая формулировка обеспечивает как то, что соответствующие магнитные экваторы контролируемо (в терминах магнитного поля) близки, так и то, какие полярности (внутри или наружу поверхности Σ) у магнитного поля вне некоторой окрестности магнитного экватора.

Вариация модуля. Близость модулей векторных полей ∇f и ∇g означает, что всюду на поверхности Σ разность длин не превосходит величины δ , которую будем предполагать много меньшей максимального значения L модуля векторных полей на поверхности

$$\Sigma - \delta \ll \max_{\Sigma} (\|\nabla f(x)\|, \|\nabla g(x)\|) \leq L.$$

Наша ближайшая цель – доказать следующую теорему:

Теорема 2 (Теорема сходимости). *Предположим, что два (не обязательно различных) магнитных потенциала f и g удовлетворяют всем перечисленным выше условиям (убывания, вариаций модуля поля и магнитного экватора). Если $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$, то $\|\nabla f - \nabla g\| \rightarrow 0$ в Ω .*

Ясно, что доказанная выше Теорема единственности является следствием Теоремы сходимости. Однако мы привели независимое и гораздо менее сложное ее доказательство с целью сделать все утверждения более прозрачными.

3.4. Вспомогательные утверждения

Известно, что для широкого класса гармонических функций, включающего, в частности, исследуемые здесь потенциалы, оценки функции влекут оценки ее градиента и наоборот. Соответствующие математические утверждения могут быть сформулированы несколькими способами, для наших целей выбрано Следствие 5.18 из книги [Mitrea, 1994]:

Лемма 2. Для любой, стремящейся к нулю на бесконечности, гармонической в Ω функции $u(\cdot)$ выполнено

$$\int_{\Sigma} \|u\|^2 dS \sim \iint_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \text{dist}(x, \Sigma) dV.$$

Здесь (\sim) – значок эквивалентности двух, зависящих от некоторого параметра ϵ , величин F и G . Эквивалентность означает существование двух положительных констант D_1 и D_2 таких, что для всех ϵ выполнены неравенства $F(\epsilon) < D_2 \cdot G(\epsilon)$ и $G(\epsilon) < D_2 \cdot F(\epsilon)$. В ряде случаев эти константы удается явно вычислить, исходя из, скажем, коэффициентов разложения по сферическим гармоникам.

3.5. Основная лемма о магнитных потенциалах

Лемма 3. Пусть магнитный потенциал $u(\cdot)$ гармоничен в Ω' , удовлетворяет Условию убывания на бесконечности и достигает в точке $x_0 \in \Sigma$ своего максимального значения $u(x_0) = a > 0$ в области $\Omega \cup \Sigma$. Тогда $\|\nabla u(x_0)\| > \min(a^2 \hat{C}, \hat{C})$, где \hat{C} – положительная константа, которую можно выразить через параметры в условии убывания: $\hat{C} = (3^{\frac{1}{d}} K + 3)^{-2}$.

Доказательство. Обозначим (см. рис. 1) через $\hat{x} \in \Omega$ центр сферы Σ_1 радиуса $R = K \cdot (3a^{-1})^{\frac{1}{d}} + 3a^{-1}$, касающейся в точке x_0 поверхности Σ .

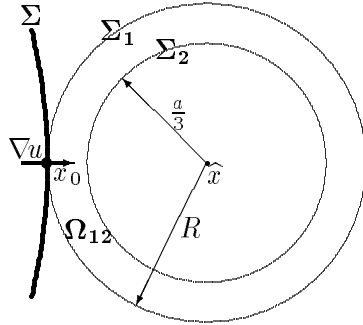


Рис. 1.

Поскольку поверхность Σ ограничивает выпуклую область – $(\Sigma_1 \setminus x_0) \subset \Omega$. Рассмотрим также меньшую сферу Σ_2 радиуса $3a^{-1}$ с тем же самым центром \hat{x} . Очевидным образом для каждой точки $x \in \Sigma_2$ имеем $\|x\| \geq K \cdot (3a^{-1})^{\frac{1}{d}}$. Следовательно, в силу Условия убывания, для каждой точки $x \in \Sigma_2$ выполнено неравенство $u(x) < \frac{a}{3}$. Обозначим через Ω_{12} область в \mathbb{R}^3 , ограниченную поверхностями Σ_1 и Σ_2 .

Рассмотрим теперь в области Ω_{12} гармоническую функцию $v(x)$, определенную формулой:

$$v(x) = a - u(x) - \left(\frac{1}{\|x - \hat{x}\|} - \frac{1}{R} \right).$$

Легко видеть, что $v(x_0) = 0$, а также

$$\begin{aligned} \forall x \in \Sigma_1 \quad & \left(\frac{1}{\|x - \hat{x}\|} - \frac{1}{R} \right) = \left(\frac{1}{|R|} - \frac{1}{R} \right) = 0, \\ \forall x \in \Sigma_2 \quad & \left(\frac{1}{|x - \hat{x}|} - \frac{1}{R} \right) = \left(\frac{a}{3} - \frac{1}{R} \right) < \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \forall x \in (\Sigma_1 \setminus x_0), \quad & v(x) > 0, \\ \forall x \in \Sigma_2, \quad & v(x) > a - \frac{a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3} > 0. \end{aligned}$$

Поскольку гармоническая функция $v(x)$ неотрицательна на границе $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ области Ω_{12} , она является неотрицательной (на самом деле – положительной) в области Ω_{12} . Отсюда $\left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_0} \geq 0$. Теперь

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_0} &= \left. \frac{\partial(a - u(x))}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_0} - \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|x - \hat{x}|} - \frac{1}{R} \right) \right|_{x_0} = \\ &= - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_0} - \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{|x - \hat{x}|} \right) \right|_{x_0} = \\ &= - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_0} - \left(\frac{1}{R} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Эти неравенства вместе с тем обстоятельством, что $\nabla h(x_0)$ перпендикулярно поверхности Σ , обеспечивают желаемое:

$$\begin{aligned} |\nabla u(x_0)| &= -\nabla u(x_0) \cdot \mathbf{n} = - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}} \right|_{x_0} \geq \left(\frac{1}{R} \right)^2, \\ |\nabla u(x_0)| &\geq \left(K \cdot (3a^{-1})^{\frac{1}{d}} + 3a^{-1} \right)^{-2}, \\ |\nabla u(x_0)| &\geq \begin{cases} a^2 \cdot \left(3^{\frac{1}{d}} K + 3 \right)^{-2}, & a \leq 1, \\ \left(3^{\frac{1}{d}} K + 3 \right)^{-2}, & a \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко также вывести следующее полезное следствие.

Следствие 1. Пусть гармонический потенциал $u(\cdot)$ как обычно удовлетворяет Условию убывания и достигает в $x_0 \in \Sigma$ своего максимального значения $u(x_0) = a > 0$ в области $\Omega \cup \Sigma$, и предположим, что

$$|\nabla u(x_0)| < \left(3^{\frac{1}{d}}K + 3\right)^{-2}. \quad (9)$$

Тогда

$$a < \sqrt{|\nabla u(x_0)|} \left(3^{\frac{1}{d}}K + 3\right). \quad (10)$$

Вернемся к рассмотрению двух (вообще говоря, не обязательно не совпадающих между собой) потенциалов f и g из формулировки Теоремы сходимости, т.е. удовлетворяющих всем вышеприведенным условиям убывания и вариаций.

Лемма 4. Пусть градиент гармонического потенциала $h = f - g$ перпендикулярен к поверхности Σ в точке $O \in (U_\varepsilon^- \cup U_\varepsilon^+)$. Тогда

$$|\nabla h(O)| \leq \frac{\delta(2L - \delta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} + \varepsilon}. \quad (11)$$

Доказательство. Мы используем теорему косинусов из курса элементарной геометрии, основываясь на обозначениях рис. 2.

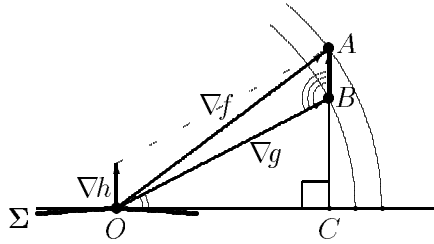


Рис. 2.

$$\begin{aligned} |\vec{OA}|^2 &= |\vec{OB}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2|\vec{OB}||\vec{AB}|\cos\widehat{OBA}, \\ |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}||\vec{OB}|\sin\widehat{COB} - (|\vec{OA}| - |\vec{OB}|)(|\vec{OA}| + |\vec{OB}|) &= 0, \\ |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}||\vec{BC}| - (|\vec{OA}| - |\vec{OB}|)(|\vec{OA}| + |\vec{OB}|) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Положительная величина $|\vec{AB}|$ равна положительному корню квадратного уравнения (12).

$$|\vec{A}\vec{B}| = \sqrt{|\vec{B}\vec{C}|^2 + (|\vec{O}\vec{A}| - |\vec{O}\vec{B}|) (|\vec{O}\vec{A}| + |\vec{O}\vec{B}|)} - |\vec{B}\vec{C}|, \quad (13)$$

$$|\vec{A}\vec{B}| \leq \sqrt{|\vec{B}\vec{C}|^2 + \delta(2L - \delta)} - |\vec{B}\vec{C}|, \quad (14)$$

$$|\vec{A}\vec{B}| \leq \sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} - \varepsilon = \frac{\delta(2L - \delta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} + \varepsilon}. \quad (15)$$

Переход от (14) к (15) законен, поскольку функция $y(x) = \sqrt{x^2 + A} - x$ убывает при положительных x и положительном A .

3.6. Сходимость

Доказательство Теоремы сходимости будет достигнуто следующим, не вполне прямым способом. Сначала получим оценку величины $|\nabla f - \nabla g| = |\nabla(f - g)|$ в точке экстремума $f - g$ на поверхности Σ , затем с помощью Следствия 1 получим оценку для $\|f - g\|$ в области $\Omega \cup \Sigma$, и, наконец, используем Лемму 2 для доказательства того, что $|\nabla f - \nabla g| \rightarrow 0$ в области $\Omega \cup \Sigma$, когда $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ (на самом деле, основная идея доказательства состоит в переходе от оценок на потенциал к оценкам на его градиент и обратно).

Сначала применим результаты предыдущего раздела к гармоническому потенциалу $h = f - g$. Легко видеть, что для потенциала $h = f - g$ Условия убывания и вариаций выполнены с константами $\hat{d} = d$, $\hat{\varepsilon} = 2\varepsilon$ и $\hat{K} = 2^{\frac{1}{a}}K$, при этом разбиение поверхности Σ то же самое: $\Sigma = U_\varepsilon^+ \cup U_\varepsilon^- \cup U_\varepsilon^0$.

Теперь, руководствуясь Принципом максимума [Владимиров, 1981; Мизохота, 1977] видим, что функция h достигает своего минимума и максимума по области $\Omega \cup \Sigma$ либо в ∞ , либо на поверхности Σ . Согласно комментарию к Лемме 1 в начале этого раздела, оба экстремума лежат все же на поверхности Σ ; впрочем в данном конкретном рассуждении достаточно того, что, по крайней мере, один из них – максимум – находится в $x_0 \in \Sigma$ (если необходимо – рассмотрим $h' = g - f$). Как уже объяснялось, $\nabla h(x_0)$ перпендикулярен поверхности Σ .

Из геометрических соображений очевидно, $x_0 \in U_\varepsilon^0$, $|\nabla h(x_0)| \leq 2\varepsilon$.

Если же $x_0 \in (U_\varepsilon^- \cup U_\varepsilon^+)$, применим Лемму 4 – получим, что

$$|\nabla h(x_0)| \leq 2 \cdot \max \left(\frac{\delta L}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} + \varepsilon}, \varepsilon \right). \quad (16)$$

Для краткости обозначим

$$C = \sqrt{2} \left(3^{\frac{1}{a}} \hat{K} + 3 \right) = \sqrt{2} \left(6^{\frac{1}{a}} K + 3 \right). \quad (17)$$

Очевидно, что при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ правая часть неравенства (16) также стремится к 0; следовательно, неравенство (10) в Следствии 1 обеспечивает верхнюю границу для величины $h(x_0)$ (при этом ε и δ должны быть достаточно малыми, чтобы выполнялось неравенство (9) с заменой u на h):

$$h(x_0) \leq C \cdot \sqrt{\max\left(\frac{\delta L}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} + \varepsilon}, \varepsilon\right)} = C \cdot R(\varepsilon, \delta). \quad (18)$$

Принимая во внимание неравенство $h(x)|_{\Sigma} < h(x_0)$ и повторяя рассуждение для $h' = g - f$, получим для достаточно малых значений ε и δ :

$$\sup_{x \in \Omega} |h(x)| \leq \sup_{x \in \Sigma} |h(x)| \leq C \cdot \sqrt{\max\left(\frac{\delta L}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} + \varepsilon}, \varepsilon\right)}. \quad (19)$$

Следовательно, $|h(x)| \rightarrow 0$ всюду в $\Omega \cup \Sigma$, если $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. В силу теоремы сходимости Вейерштрасса (см. например, [Courant, Hilbert, 1966]) всюду в Ω

$$|\nabla f - \nabla g| = |\nabla h| \rightarrow 0$$

(заметим, что теорема Вейерштрасса ничего не говорит о поведении $|\nabla h|$ на поверхности Σ).

Альтернативным образом сходимость в Ω следует из Леммы 2,

$$|\nabla f - \nabla g| = |\nabla h| \rightarrow 0$$

в Ω . Это завершает доказательство Теоремы сходимости 2.

3.7. Уточнение

Из приведенных рассуждений непосредственно не ясно, что происходит со сходимостью градиентов на поверхности Σ . В самом общем случае из того, что последовательность гармонических функций $h_k(x)$ сходится к нулю в области $\Omega \cup \Sigma$ не вытекает, что $|\nabla h_k(x)| \rightarrow 0$ для $x \in \Sigma$. Действительно, рассмотрим пример, когда Σ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат и

$$h_k(x) = h_k(\rho, \theta, \varphi) = \frac{P_k(\cos \theta)}{\rho^{k+1}},$$

где $P_k()$ — полином Лежандра степени k , а ρ , θ и φ обозначают сферические координаты в $\mathbb{R}^3 \setminus 0$. Тогда

$$\iint_{\Sigma} |h_k|^2 d\sigma = \frac{4\pi}{2k+1} \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} |\nabla h_k|^2 d\sigma = 4\pi(k+1).$$

Следовательно, при $k \rightarrow 0$, всюду в $\Omega \cup \Sigma$ $|h_k| \rightarrow 0$, хотя $|\nabla h_k|$ возрастает. Причина, разумеется, в том, что множество функций $\{h_k\}$ не является равномерно ограниченным в Ω' (напомним, что эта область включает часть единичного шара, близкую к сфере Σ).

На самом деле выбранное *Условие убывания* обеспечивает необходимую равномерную ограниченность, а значит и сходимость градиентов также и на поверхности Σ , это можно показать с использованием следующего вспомогательного утверждения (см. [Courant, Hilbert, 1966; IV, §2, subsection 3]):

Лемма 5. Для любого равномерно ограниченного бесконечного множества $\{h_\}$ регулярных гармонических функций на открытой области G и замкнутой подобласти G' области G , можно выбрать подпоследовательность $\{h_m\}$, равномерно сходящуюся к некоторой гармонической функции всюду на G' .*

Рассмотрим $G = \Omega'$, положим $\{h_i | i \in \mathcal{I}\}$ равным множеству всех функций $h = f - g$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$. По *Условию убывания* это семейство равномерно ограничено. Теперь, если некоторое подмножество $\{h_j | j \in \mathcal{J}\} \subset \{h_i | i \in \mathcal{I}\}$ не удовлетворяет требованию $\nabla h_j(x) \rightarrow 0$ для $x \in \Sigma$ при $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ (скажем, $|\nabla h_j(x_0)| \geq \text{const} > 0$ для всех $j \in \mathcal{J}$), то Лемма 5 утверждает, что некоторая подпоследовательность $\{h_m\}$ последовательности $\{h_j | j \in \mathcal{J}\}$ равномерно сходится к h_0 в замкнутой окрестности G' в Σ : $\Sigma \subset G' \subset G$. Эта предельная функция h_0 , тем самым, аналитична в G' , с другой стороны, она должна быть равна нулю в $G' \cap \Omega$. Таким образом, h_0 должна быть тождественным нулем всюду в G' и удовлетворять $\nabla h_0(x) \equiv 0$ при $x \in \Sigma$. Противоречие с выбором подмножества $\{h_j | j \in \mathcal{J}\}$. Стало быть все функции $\{h_i | i \in \mathcal{I}\}$ должны удовлетворять $\nabla h_i(x) \rightarrow 0$ для $x \in \Sigma$, когда $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$.

3.8. Некоторые вычисления на поверхности сферы

После доказательства сходимости желательным остается получить какие-либо явные (= не использующие констант из Леммы 2) оценки в относительных единицах на абсолютную величину поля $\sup_{\Omega} |\nabla f - \nabla g|$ или (что гораздо проще) на его норму:

$$\|\nabla f - \nabla g\| = \sqrt{\iint_{\Sigma} |\nabla f - \nabla g|^2 d\sigma}.$$

Пример такого явного вычисления в достаточно далеком от реальности (как уже неоднократно отмечалось ранее) случае потенциалов f и g , имеющих представление в виде конечной суммы сферических гармоник, все же полезен тем, что он может быть распространен на случай быстро убывающих коэффициентов и бесконечного разложения (спектра) по сферическим гармоникам или какому-то иному базису.

Итак, Σ в этом разделе будет считаться поверхностью сферы S_r некоторого радиуса r .

Напомним вначале классический результат Максвелла [Maxwell, 1885] (см. также [Arnold, 1996; Backus et al., 1996]). Рассмотрим разложение магнитного потенциала u в ряд по (нормализованным) сферическим гармоникам:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \quad f_k = \frac{F_k}{r^{2k+1}}, \quad r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)},$$

где $F_k = F_k(x, y, z)$ обозначает однородный нормализованный многочлен степени k :

$$\iint_{S_1} f_i f_j d\sigma = \delta_{ij}.$$

Теорема 3 (Теорема Максвелла). Производная степени n от гармонической функции $1/r$ вдоль n постоянных в \mathbb{R}^3 векторных полей совпадает со сферической гармоникой степени n . Каждая ненулевая сферическая гармоника степени n может быть получена таким способом посредством выбора подходящих n ненулевых векторных полей.

Отсюда следует, что каждая евклидова координатная функция ∇f_k также является некоторой ненормализованной сферической гармоникой. Из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{F_k}{r^b} = \frac{r^2(\partial F_k / \partial x) - bx F_k}{r^{b+2}}$$

видно, что числитель является снова однородным многочленом степени $k + 1$. Следовательно,

$$(\nabla f_k \cdot \nabla f_k) = \frac{Q_{2k+2}}{r^{4k+6}},$$

где Q_{2k+2} есть однородный многочлен степени $2k + 2$. Применим теперь Формулу Грина к гармонической функции f_k :

$$\iiint_{\Omega} (\nabla f_k \cdot \nabla f_k) dV = \iint_{S_1} f_k \frac{\partial f_k}{\partial \nu} d\sigma.$$

В силу того, что f_k – однородная функция степени $-(k+1)$ получаем на единичной сфере $\partial f_k / \partial \nu = (k+1)f_k$, а также

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\nabla f_k \cdot \nabla f_k) dV &= \int_1^{\infty} \left(\iint_{S_r} (\nabla f_k \cdot \nabla f_k) d\sigma \right) dr = \\ &= \int_1^{\infty} \frac{1}{r^{2k+2}} dr \iint_{S_1} Q_{2k+2} d\sigma. \end{aligned}$$

Наконец, получаем хорошо известное соотношение

$$\iint_{S_1} Q_{2k+2} d\sigma = (2k+1)(k+1) \iint_{S_1} f_k^2 d\sigma = (2k+1)(k+1). \quad (20)$$

Вернемся к случаю магнитного потенциала, представленного в виде конечной суммы сферических гармоник. Мы можем оценить норму ”векторной ошибки” поля \mathbf{B} на единичной сфере S_1 :

$$\|\nabla f - \nabla g\|_{L^2} = \sqrt{\iint_{S_1} |\nabla f - \nabla g|^2 d\sigma}.$$

Действительно, для гармонического потенциала $h = f - g$

$$a = \max_{S_1} |f - g| \implies \sum_{k=1}^n c_k^2 = \iint_{S_1} |h|^2 d\sigma \leq 4\pi a^2,$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} |\nabla h|^2 d\sigma &= \iint_{S_1} (\nabla h \cdot \nabla h) d\sigma = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^2 \iint_{S_1} Q_{2k+2} d\sigma = \sum_{k=1}^n (2k+1)(k+1) c_k^2 \leq \\ &\leq (2n+1)(n+1) \sum_{k=1}^n c_k^2 \leq 4\pi a^2 (2n+1)(n+1). \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользовавшись неравенствами (19) и (21), мы получаем оценку сверху для $\|\nabla f - \nabla g\|_{L^2}$:

$$\|\nabla f - \nabla g\|_{L^2} \leq 2\sqrt{2\pi(2n^2 + 3n + 1)} \left(6^{\frac{1}{d}} K + 3\right) \cdot R(\varepsilon, \delta). \quad (22)$$

3.9. Практический аспект вопроса

Для практического использования оценки (22) важна величина $R(\varepsilon, \delta)$, стоящая в правой части неравенства (19)

$$R(\varepsilon, \delta) = \sqrt{\max\left(\frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2 - \delta)} + \varepsilon}, \varepsilon\right)}. \quad (23)$$

Здесь мы полагаем, что ε и δ выражены в долях максимальной длины L вектора магнитного поля L и достаточно малы. Для таких (близких по порядку величины к реальным ошибкам измерения модуля поля) аргументов ε и δ на рис. 3 изображена часть графика функции $R(\varepsilon, \delta)$. Хорошо видно, при каких значениях аргументов максимальный член в скобках в (23) стоит первым.

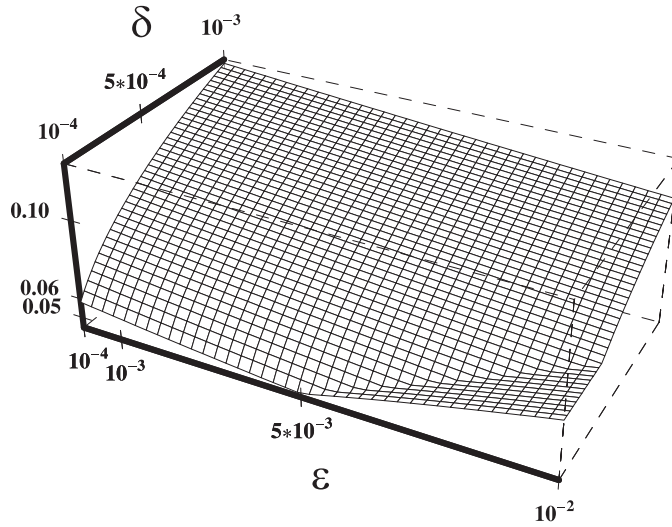


Рис. 3. График $R(\varepsilon, \delta)$

Из рис. 3 видно, что чем меньше ε , тем медленнее сходимость функции $R(\varepsilon, \delta)$ к 0, когда $\delta \rightarrow 0$ (хотя в выбранном масштабе графика этот эффект выражен довольно слабо).

Напротив, из (23) очевидно, что для больших ε функция $R(\varepsilon, \delta)$ имеет величину $\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом, большие надежды на использование оценки (22) для практических целей неоправданы: величина $R(\varepsilon, \delta)$ имеет слишком медленное убывание.

Однако на практике информация о нахождении магнитного экватора возникает все-таки из *измерений* нормальной к поверхности Σ компоненты поля \mathbf{B} – в нашем распоряжении имеется несколько больше

информации, нежели в Условии вариации \mathbf{B} . Например, положим, мы ищем магнитный экватор, измеряя B_n в широтной полосе U_E вокруг его предполагаемого положения (как на рис. 4) – в нашем распоряжении, тем самым, оказываются и эти данные измерений – и предположим, что точность измерений величины B_n попрежнему равна $\delta/2$. В этом случае неравенство (16) следует заменить на гораздо более пригодное для практических нужд неравенство (24). Во-первых, отдельно стоящий (справа) под знаком \max член ε в (16) заменим на $\delta/2$, воспользовавшись дополнительной информацией об измерениях B_n с точностью $\delta/2$ в полосе. Заметим, что при этом никаких требований к точности измерений остальных компонент не выдвигается. Этот факт, повидимому, и лег в основу эмпирического наблюдения, сделанного в статье [Holme, Bloxham, 1995].

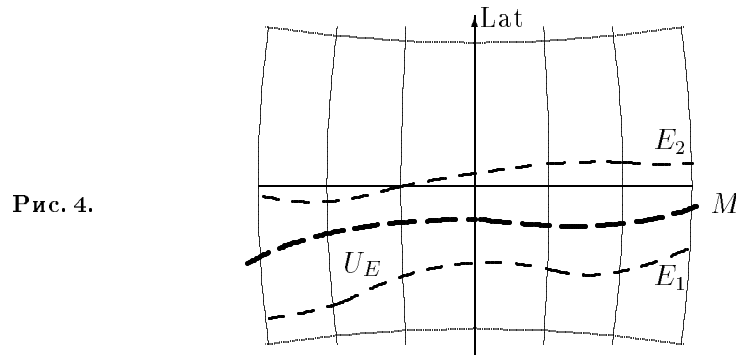


Рис. 4.

Во-вторых, стоящий слева под знаком \max член ε можно выбрать равным минимальному значению для B_n на границе $E_1 \cup E_2$ полосы U_E

$$|\nabla h(x_0)| \leq \max \left(\frac{2L\delta}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta(2L - \delta)} + \varepsilon}, \delta \right). \quad (24)$$

Результатом будет существенное увеличение скорости сходимости к нулю необходимой нам оценки сверху (с увеличением точности в фиксированной полосе U_E). Это проясняет результаты [Lowes, 1975] использования дополнительных к модульным векторных данных (см., также, [Barracough, Nevitt, 1976]). Примечательным при этом является тот факт, что никаких предположений о характере величин ε и δ по отношению к усреднениям (если предполагать их зависящими от случайных или неслучайных параметров) не было сделано.

Приложения

Как уже отмечалось во Введении, практический интерес представляет метод построения модели магнитного поля, исходя из данных по интенсивности. Как показано в статье [Ultré et al., 1998], внесение ограничения на положение магнитного экватора (т.е. привлечение качественно иных, нежели данные по интенсивности, дополнительных данных) уменьшает ошибку в построении модели на порядок, доводя ее до практически возможного (имея в виду плотность покрытия, спонтанные ошибки в измерениях и т.п.) предела точности. В настоящее время изложенная в [Ultré et al., 1998] схема обработки уже используется при составлении магнитных карт по данным интенсивности, полученным по наблюдениям со спутников.

Приведем краткое описание теста из работы [Ultré et al., 1998]. Рассматривались *векторные данные*, собранные спутником MAGSAT. Они были преобразованы в данные по интенсивностям в соответствующих точках, а также в данные о примерном положении магнитного экватора (выделением тех областей, где вертикальная компонента не превосходила некоторой фиксированной малой величины).

Затем, к этим неполным данным были применены две версии алгоритма восстановления коэффициентов разложения по сферическим гармоникам: стандартный алгоритм, дающий, вообще говоря, большую ошибку в приэкваториальной зоне, и уточненный алгоритм, использующий ограничение на величину вертикальной компоненты восстанавливаемого поля в приэкваториальной зоне.

Как уже обсуждалось выше, условие на положение магнитного экватора уместно формулировать именно в терминах величины вертикальной компоненты восстанавливаемого поля.

Всего было задействовано 5000 точек наблюдения, т.е. соответствующее восстановление имело смысл до гармоник не слишком высокого порядка, в тесте этот порядок был выбран равным 13.

В результате первого подхода (т.е. без учета информации о положении магнитного экватора) общая средняя (т.е. проинтегрированная по всем точкам) ошибка составила $144nT$, при том, что в приэкваториальной зоне наблюдались точки, в которых ошибка вертикальной компоненты вектора магнитного поля составляла свыше $700nT$, что, конечно, чрезвычайно много даже для такого, весьма грубого, покрытия 5000 точками поверхности наблюдения.

При втором подходе (т.е. с учетом информации о положении магнитного экватора) общая средняя (т.е. проинтегрированная по всем точкам) ошибка составила $21nT$, при том, что максимальная ошибка не превышала $40nT$.

Это достаточно грубое тестирование (5000 точек не обеспечивает хорошего разрешения) можно уточнить для большего числа исходных данных и получить новое соотношение средних и максимальных ошибок – и оно будет еще сильнее подчеркивать роль дополнительных данных о положении магнитного экватора. В пределе, естественно, второй способ становится совершенно точным.

4. Восстановление поля по направлениям на поверхности

4.1. Мотивировки и результат

В этом разделе базисным объектом исследования будет множество P на поверхности Σ , в точках которого вектор *гармонического поля* (т.е. поле – градиент гармонического в Ω' потенциала: термин взят из статьи [Backus, 1968]) либо равен нулю, либо перпендикулярен поверхности. По соображениям общего положения типичное такое множество состоит из конечного числа точек, но мы будем рассматривать все в терминах компонент связности. Векторное поле определяет на $\Sigma \setminus P$ поле направлений, причем ни одно из направлений не перпендикулярно поверхности Σ .

Основной результат этого раздела (см. ниже Теорему 4) гласит, что, если на поверхности Σ имеются не более n компонент связности множества P , то может существовать не более, чем $(n - 1)$ -мерное линейное пространство гармонических векторных полей, порождающих данное поле направлений.

К проблемам восстановления магнитного поля \mathbf{B} по палеомагнитным данным все это имеет следующее отношение: разумно считать (см. [Hulot, Khokhlov, Le Mouëll, 1997; Appendix B]), что в моделях поля, построенных по палеомагнитным данным, множество P состоит всего из двух точек – магнитных полюсов (северного и южного). Еще раз напомним, что типичными измерениями в палеомагнетизме являются измерения только направлений поля \mathbf{B} без его интенсивности. Таким образом, следствием Теоремы 4 получим теорему единственности восстановления магнитного поля (единственности с точностью до постоянного сомножителя) по данным его направлений. Наличие или отсутствие в данных измерений ориентации магнитного поля относительно поля направлений на Σ (с множеством P , состоящим из двух точек) влияет только на характер ответа – является ли постоянный сомножитель обязательно положительным или нет.

4.2. Свойства поля направлений

Для данного поля направлений $\widehat{\mathbf{B}}$, отвечающего гармоническому векторному полю \mathbf{B} , мы назовем $\widehat{\mathbf{B}}$ -решением гармонический в $\Omega \cup \Sigma$ потенциал (возможно, содержащий в разложении по сферическим гармоникам монополи) такой, что направления векторного поля ∇f совпадают с $\widehat{\mathbf{B}}$. Очевидным образом, $\widehat{\mathbf{B}}$ -решения образуют линейное пространство. Наша ближайшая цель – оценить сверху размерность линейного пространства $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений в терминах числа компонент линейной связности n множества P .

Лемма 6. Любое $\widehat{\mathbf{B}}$ -решение f принимает постоянное значение на любой компоненте P_i множества P .

Доказательство. Действительно, в любой точке $p_i \in P_i$ проекция $\nabla_T f(p_i)$ вектора $\nabla f(p_i)$ на касательную к Σ плоскость равна нулю. Поскольку две точки p_i, p'_i , лежащие в одной компоненте линейной связности P_i , можно соединить лежащей в этой же компоненте кривой $\varphi(t)$ с $\varphi(0) = p_i, \varphi(1) = p'_i$, то значение потенциала всюду на этой кривой постоянно.

По Лемме 1 и комментарию к ней в разделе 3 (а также в силу Леммы 3) максимальное и минимальное значения любого $\widehat{\mathbf{B}}$ -решения принадлежат множеству P . Отсюда очевидным образом вытекает

Лемма 7. Любое $\widehat{\mathbf{B}}$ -решение, равное нулю на множестве $P \subset \Sigma$, тождественно равно нулю всюду в Ω .

Поскольку разность $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений есть снова $\widehat{\mathbf{B}}$ -решение, имеет место

Лемма 8. Два $\widehat{\mathbf{B}}$ -решения, совпадающие во всех точках множества $P \subset \Sigma$, совпадают всюду в Ω .

Лемма 9. Если существуют n линейно независимых $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений

$$f_1, f_2, \dots, f_n,$$

то матрица, составленная из чисел $a_{i,j} = f_i(p_j)$, $p_j \in P_j$, обратима.

Доказательство. Предположим противное – матрица вырождена. Тогда столбцы (а также строки) матрицы линейно зависимы. Последнее означает, что найдутся n не равных одновременно нулю чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ таких, что

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(p_i) = 0.$$

Таким образом, $\widehat{\mathbf{B}}$ -решение $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ в силу Леммы 7 всюду в $\Omega \cup \Sigma$ равно нулю – противоречие с предположением линейной независимости $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений.

4.3. Основная теорема

Теорема 4. Размерность пространства $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений. Пространство $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений, отвечающих данному полю направлений на Σ с n -компонентным множеством P , не более, чем n -мерно, подпространство $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений, не содержащих в разложении монополи, не более, чем $(n - 1)$ -мерно.

Доказательство. Предположим противное: существует $n + 1$ линейно независимых $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений f_1, f_2, \dots, f_{n+1} . Образует с помощью первых n из них матрицу $a_{i,j} = f_i(p_j)$; по Лемме 9 эта матрица невырождена. Следовательно, существует набор $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ не всех одновременно равных нулю чисел (решений соответствующего линейного уравнения) таких, что

$$\forall i, i = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(p_i) = f_{n+1}(p_i).$$

Таким образом, две гармонические функции $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ и f_{n+1} имеют совпадающие на множестве P значения, а, следовательно, эти функции совпадают всюду по Лемме 8.

Предположим теперь, что имеется n линейно независимых $\widehat{\mathbf{B}}$ -решений f_1, f_2, \dots, f_n , не содержащих в разложении по сферическим гармоникам монополя. Тогда система уравнений на $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ с той же матрицей $a_{i,j} = f_i(p_j)$ и *строго положительными* правыми частями имеет единственное решение. Это означает существование линейной комбинации потенциалов $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$, принимающей строго положительные значения во всех точках множества P , и, поскольку максимум и минимум принадлежат P , строго положительной также и во всех точках множества Σ . Но это невозможно, так как линейная комбинация $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ не содержит монополя. Таким образом, пространство решений для магнитных полей не более, чем $(n - 1)$ -мерно.

Замечание. Как видно из доказательств, результаты этого раздела можно несколько обобщить для гармонических потенциалов в пространствах размерности больше трех. По соображениям специализации материала вокруг математических вопросов геомагнетизма эти результаты в статью не включены.

Приложения

При построении модели палеомагнитного поля на практике коэффициенты разложения поля по сферическим гармоникам ищут методом наименьших квадратов, причем соответствующий градиентный поиск имеет место в *нелинейной ситуации*: исходные данные являются не векторным полем, а полем направлений. В общем случае минимизируемый

функционал может иметь несколько минимумов. Установленный здесь результат показывает, что в практически интересной ситуации палеомагнетизма этого не происходит и, следовательно, соответствующий алгоритм (обычно – градиентный поиск) стабильно себя ведет при весьма общих предположениях на коэффициенты.

5. Статистические модели поля направлений

5.1. Мотивировки

В первом приближении усреднение магнитного поля в масштабе принятых в палеомагнетизме временных интервалов устроено как диполь. Уже в 70-х годах [Lee, 1983; Wilson, 1970] было установлено, что и следующие члены разложения по сферическим гармоникам также могут быть восстановлены, например, с использованием базы палеомагнитных данных (покрывающих последние пять миллионов лет) вулканических лав. Кроме того, на основании этих данных оказывается возможным делать выводы не только об усредненном векторе поля, но и оценивать соответствующие дисперсии (предполагая соответствующий случайный процесс изменения вектора поля в данной точке стационарным в некотором временном масштабе). Ниже, под моделью поля в палеомагнетизме будем понимать модель, включающую описание дисперсии поля.

Палеомагнитные данные достаточно нечасто содержат полную информацию о векторе поля, здесь мы будем считать, что данные о поле содержат только ориентированные направления. Как обычно, моделирование магнитного поля состоит в предъявлении коэффициентов разложения по сферическим гармоникам магнитного потенциала, эти коэффициенты в палеомагнетизме полагают случайными величинами, т.е. используемые модели исключают дальнейшее разрешение по времени внутри некоторого интервала времени геологического масштаба. Это соглашение продиктовано предположением, что относящиеся к этому интервалу данные представляют *статистическую выборку*, т.е. результат последовательных независимых испытаний. Напомним, что данными в палеомагнетизме служат *направления* когда-то существовавшего магнитного поля; эти направления принято кодировать парой углов {склонение, наклонение}, статистический анализ этих (вообще говоря – коррелированных) величин связан с достаточно сложными законами распределения.

Таким образом, в описание модели входят характеристики распределений для коэффициентов – на сегодняшний день, модели строят исключительно для нормального (гауссовского) распределения коэффициентов. Геофизическая общественность пока что придерживается этой

статистической модели для палеомагнетизма. Вообще говоря, это не более чем эвристическое предположение о строении модели и его следует, по возможности, проверять. На сегодняшний день объем и качество палеомагнитных данных недостаточны для установления значимых отличий в законах распределения, поэтому интересно, выполняется ли предположение о распределении коэффициентов и для синтетических данных, возникающих из чисто вычислительных моделей генерации магнитного поля Земли. Если проверить предположения о статистических свойствах коэффициентов разложения по сферическим гармоникам для *геодинамо Глацмайера-Робертса*, то можно сделать заключение (соответствующее исследование проводилось автором, соответствующая публикация находится в печати), что распределение коэффициентов симметрично, форма распределения не зависит от порядкового номера коэффициента (с точностью до линейных замен аргумента) и значимо отличается от гауссовой кривой (распределение Лапласа аппроксимирует эту форму гораздо лучше), коэффициенты распределения можно с хорошей точностью полагать независимыми случайными величинами. Таким образом, разговоры об *общей модели палеомагнетизма* являются преждевременными, что не отменяет вопроса об эффективных тестах для проверки конкретных моделей.

Изложение в этом разделе опирается на гипотезу многомерного гауссовского распределения коэффициентов. Исходно такие палеомодели сравнивали лишь на уровне математических ожиданий коэффициентов, в последнее время [Quidelleur et al., 1994] возникло желание учитывать также и дисперсии [Constable, Parker, 1988; Quidelleur, Courtillot, 1996]. Явные формулы, связывающие параметры коэффициентов и распределения направлений соответствующего случайного векторного поля, в случае многомерного гауссовского распределения коэффициентов, приведены для случая, когда коэффициенты независимы; эта схема статистической обработки тривиально обобщается на случай коррелированных коэффициентов и – с некоторыми оговорками – на случай негауссовского распределения. Мотивы такого ограничения общности следующие:

- на простом примере продемонстрировать идею,
- соответствовать имеющемуся на сегодня состоянию в построении гипотез.

В отличие от распространенных, весьма путаных методов отдельной работы с данными о склонении и с данными о наклонении, в этой статье используется прямой (и более прозрачный) способ. Единственная трудность, связанная с этим подходом, заключается в вычислительной

стороне дела – в конце будет описана схема компьютерной программы (реализованной автором и уже используемой [Carlut, 1997]) и некоторые примеры ее применений.

5.2. Распределение направлений гауссовского случайного вектора

Рассмотрим единичную сферу Σ в \mathbb{R}^3 с центром в начале координат O . Пусть в \mathbb{R}^3 задан случайный гауссовский вектор ξ , соответствующая плотность распределения в сферических координатах есть $\widehat{f}_\xi(R, s)$, где $s \in \Sigma$, а R обозначает расстояние до начала координат O . Центральная проекция случайного вектора ξ вдоль лучей с центром в O на единичную сферу Σ задает распределение α на Σ с плотностью распределения

$$f_\alpha(s) = \int_0^\infty \widehat{f}_\xi(R, s) dR.$$

Оказывается, в случае гауссовского случайного вектора ξ функция плотности распределения $f_\alpha(\theta, \varphi)$ в сферических координатах может быть выражена через элементарные функции и гауссову функцию ошибок. На этом будет основана вычислительная схема для исследования статистики распределений направлений. (В случае же других распределений независимых коэффициентов можно воспользоваться Центральной предельной теоремой и получить приближенный закон распределения по направлениям результирующего вектора поля в каждой точке.)

Этот случай распределения на сфере не рассмотрен в стандартно цитируемой по данному кругу проблем книге [Mardia, 1972], будем для краткости называть его *распределением типа ND* (сокращение от Normal Directional). Вернемся к явным вычислениям и рассмотрим евклидову систему координат $\{x_1, x_2, x_3\}$ с тем же самым началом O .

В общем случае трехмерное гауссовское распределение ξ определяется девятью вещественными параметрами: трехмерный вектор центра (первого момента) (m_1, m_2, m_3) и симметрическая 3×3 невырожденная матрица $\Lambda = [\lambda_{i,j}]$ вторых моментов. Обозначим через $\mathbf{\Lambda} = [\Lambda_{i,j}]$ обратную (также симметрическую) матрицу λ . В евклидовых координатах тогда функция плотности распределения ξ принимает вид:

$$f_\xi(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{\Lambda}}{(2\pi)^3}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Lambda_{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \right].$$

Эту формулу можно еще немного упростить, если выбрать x_3 -ось координат по направлению вектора центра (m_1, m_2, m_3) . Это соответ-

ствуует некоторому трехмерному вращению исходной системы координат, поэтому нетрудно вычислить изменившуюся матрицу моментов (не будем изменять обозначение для нее) и новый вектор центра $(0, 0, M)$.

Выберем теперь сферическую систему координат такую, что имеют место стандартные формулы преобразования:

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

Подставляя, получим выражение для функции плотности распределения типа ND:

$$f_\alpha(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^3}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(AR^2+BR+C)} R^2 dR, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \Lambda_{11} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \Lambda_{12} \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \Lambda_{13} \sin 2\theta \cos \varphi + \\ &+ \Lambda_{22} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \Lambda_{23} \sin 2\theta \sin \varphi + \Lambda_{33} \cos^2 \theta, \\ B &= M \cdot (-2) \cdot \left(\Lambda_{13} \sin \theta \cos \varphi + \Lambda_{23} \sin \theta \sin \varphi + \Lambda_{33} \cos \theta \right), \\ C &= M^2 \cdot \Lambda_{33}. \end{aligned} \quad (26)$$

Определенный интеграл в (25) можно вычислить явно:

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(AR^2+BR+C)} R^2 dR = \\ &= \frac{e^{-\frac{C}{2}}}{2A^2} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(4A + B^2) \left[1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{B}{2\sqrt{2A}}\right) \right] e^{\frac{B^2}{8A}}}{2\sqrt{A}} - B \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Окончательно получим формулу для плотности распределения:

$$f_\alpha(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^3}} \cdot \frac{e^{-\frac{C}{2}}}{2A^2} \cdot \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{(4A + B^2) \left[1 - \operatorname{Erf}\left(\frac{B}{2\sqrt{2A}}\right) \right] e^{\frac{B^2}{8A}}}{2\sqrt{A}} - B \right\}. \quad (28)$$

Обычные в таких случаях свойства – число модальных направлений, момент инерции, симметрии – зависят существенным образом от M и λ_{ij} . Когда M относительно велико по сравнению с элементами матрицы λ_{ij} – например, $M \gg R_0 \gg 1 \gg \lambda_{ij}$ – тогда вид графика плотности распределения типа ND можно представить себе с помощью рис. 5:

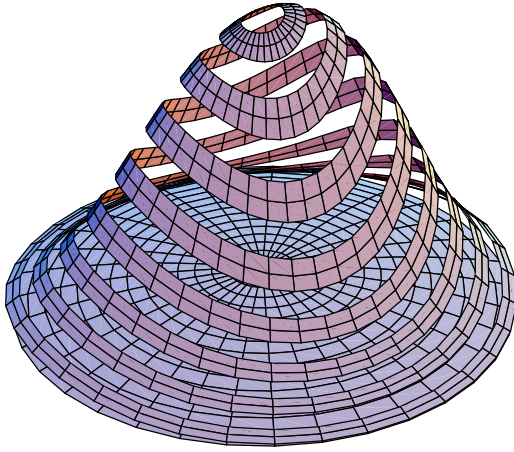


Рис. 5. Сечения $\theta = \text{const}$ поверхности $R = R_0 + f_\alpha(\theta, \varphi)$ над частью поверхности сферы $R \equiv R_0$

5.3. Связь с равномерным на $[0, 1]$ распределением

Анализ статистических гипотез, использующий случайные выборки распределений типа ND (28), также требует некоторых пояснений, поскольку выборки в этом случае состоят не из чисел, а из точек единичной сферы (которую и принято отождествлять с множеством всех направлений).

Предлагаемое здесь сведение случайных выборок для распределений на сфере к стандартному случаю числовых выборок опирается на понятие *фильтрации* на множестве (в данном случае – на множестве Σ). Для конкретной фиксированной функции плотности распределения $f_\alpha(s)$ рассмотрим (вопрос его построения разобран ниже) однопараметрическое семейство $\{U_t\}$, $t \in [0, 1]$ (называемое также *фильтром*) подмножеств $U_t \in \Sigma$ таких, что

$$\begin{aligned} P\{\alpha \in U_t\} &= t, \\ U_0 &= \emptyset, \quad U_1 = \Sigma, \\ x \leq y &\iff U_x \subseteq U_y. \end{aligned} \tag{29}$$

Определим теперь новую числовую случайную величину η по следующему правилу: если $\alpha \in U_x$ и при этом для всех $y \leq x$ направление α лежит в дополнении к множеству U_y , тогда положим $\eta = x$. По построению случайная величина η равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

Основная идея, связанная с этой конструкцией, такова: признаком того, что случайная выборка для α отклоняется от теоретически предсказанного распределения типа ND, является отклонение соответствующей выборки случайной величины η от равномерного на $[0, 1]$ распределения. Проверка последнего свойства не представляет труда:

соответствующие статистические методы хорошо отработаны – назовем прежде всего критерий Колмогорова–Смирнова и стандартный критерий χ^2 .

Остается вопрос о выборе ”правильного фильтра” на Σ , поскольку совершенно ясно, что фильтров много. Представляется естественным, что конструкция ”правильного фильтра” не должна опираться на какие-то не вытекающие из свойств ND-распределений специальные условия, т.е. не должна увеличивать информацию о распределении. Здесь будет воспроизведена (интуитивно ясная) конструкция такого фильтра, позаимствованная из книги по теории информации [Kullback, 1968; гл.2]. Она основывается исключительно на геометрических свойствах линий уровня функции плотности.

Явно, каждое множество U_t состоит из тех точек $s \in \Sigma$, для которых

$$f_\alpha(s) \geq C(t). \tag{30}$$

Действительно, для каждого $t \in (0, 1)$ существует и единственное значение $C(t)$ такое, что вероятность $P\{s \mid f_\alpha(s) \geq C(t)\}$ равна t .

Пример. В случае двумерного гауссовского распределения ν плоская кривая

$$f_\nu(x_1, x_2) = \text{const}$$

(ограничивающая соответствующее множество U_t) часто называется ”эллипсом рассеяния”. Все такие кривые являются эллипсоидами с общими направлениями главных осей, с единым центром.

Пример. В случае распределения α типа ND соответствующие кривые лежат на сфере, не являясь при этом, вообще говоря, ни плоскими, ни как-либо центрированными – это вполне очевидно из графика их проекций на экваториальную плоскость $x_3 = 0$ (рис.6). (Другая проекция изолиний (проекция Ламберта) представлена ниже на рис.8-9.)

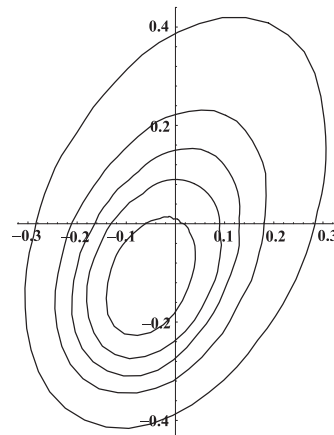


Рис. 6. Проекция кривых $f_\alpha(\theta, \varphi) = C_i$ на координатную плоскость $x_3 = 0$

5.4. Метод статистического исследования палеомагнитных данных

Как правило, база палеомагнитных данных состоит из групп измерений направлений, каждая группа относится к соответствующему району земной поверхности. Размеры каждого района пренебрежимо малы, так что считают, что вся группа измерений относится к одной точке с данной широтой и долготой. Обычное предположение состоит также во взаимной независимости измерений безотносительно того, каким группам они принадлежат.

В настоящее время общеупотребительной пространственно-временной моделью потенциала V магнитного поля в палеомагнетизме считается (см. [Constable, Parker, 1988]) так называемый Гигантский гауссовский процесс GGP (устоявшееся сокращение от Giant Gaussian Process); попросту говоря, это сумма сферических гармоник, умноженных на независимые гауссовские случайные величины – случайные гауссовские коэффициенты g_l^m и h_l^m

$$V(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi) = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{\mathfrak{R}}\right)^{l+1} (g_l^m \cos m\Theta + h_l^m \sin m\Psi) P_l^m(\cos \Theta), \quad (31)$$

где – $\{\mathfrak{R}, \Theta, \Psi\}$ система сферических координат (Θ линейно связана с географической широтой, а Ψ – географическая долгота). (Эту систему не следует путать со сферической системой координат, использованной выше для вычислений с распределением направлений.) Таким образом, собственно магнитное поле – градиент указанного потенциала – оказывается гауссовским случайным полем. Иными словами, в каждой точке $q_i = (\mathfrak{R}_i, \Theta_i, \Psi_i)$ измерений имеется случайная выборка направлений $S_q = \{s_1, \dots, s_{N(q)}\} \subset \Sigma_q$ гауссовского случайного вектора, т.е. распределение α_q типа ND. Параметры гауссовского закона распределения в каждой точке $q_i = (\mathfrak{R}_i, \Theta_i, \Psi_i)$ несложным образом вычисляются, исходя из параметров распределений гауссовских коэффициентов g_l^m и h_l^m и координат $(\mathfrak{R}_i, \Theta_i, \Psi_i)$ точки.

Основной вопрос для построения модели – это вопрос о множестве наилучших параметров распределений гауссовских коэффициентов g_l^m и h_l^m . Согласно общим принципам, следует отбрасывать набор параметров, если они не проходят некоторые статистические тесты.

Прежде всего следует трансформировать все региональные выборки данных (q – индексация по регионам) $S_q = \{s_1, \dots, s_{N(q)}\} \subset \Sigma_q$ в набор (региональных же) выборок уже равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин η_q . Такая трансформация осуществляется на основе (общей для всех регионов) гипотезы о значениях параметров распреде-

лений коэффициентов g_l^m и h_l^m ; поэтому, если η_q или η – объединение всех таких выборок по всем регионам – не проходит какой-либо стандартный тест на равномерность (см. представительный запас таких тестов в [Knuth, 1981; Vol 2]), эту гипотезу (т.е. набор параметров для распределений g_l^m и h_l^m) следует изменить. Объединение выборок – законная операция в рамках гипотезы о независимости исходных измерений в разных точках. В случае, когда данные по разным регионам сильно различаются по качеству, региональные тесты имеют самостоятельное значение, хотя в этом случае объем данных для тестирования получается меньшим. Выбор тестов зависит в, конечном счете, от предпочтений исследователя, поскольку окончательный вывод все равно звучит как ”гипотеза не противоречит эксперименту в рамках данного набора статистических проверок”.

Вычислительная же схема теста (схема соответствующей компьютерной программы) такова:

Шаг 1. Для каждой точки q находим параметры распределения случайного гауссовского вектора $\xi_q = (\mathbf{grad}V)_q = \mathbf{grad}V(\mathfrak{R}_q, \Theta_q, \Psi_q)$. Это легко делается, используя явную формулу магнитного потенциала (31) и значения параметров распределений g_l^m и h_l^m .

Шаг 2. Для каждой точки q выбираем локальную систему сферических координат $\{R, \theta, \varphi\}_q$ и явно вычисляем функцию плотности распределения $f_{\alpha_q}(\theta, \varphi)$ по формулам (26) и (28).

Шаг 3. Для каждой точки q строим фильтрацию на соответствующей этой точке единичной сфере Σ_q и вычисляем q -ю порцию, входящую в общую случайную выборку для распределения η .

Шаг 4. Объединяем все или некоторые порции, полученные на предыдущем шаге, в одну выборку η и применяем к этой выборке тест на равномерность распределения. В зависимости от результата этого теста отбрасываем или принимаем набор параметров для распределений g_l^m и h_l^m .

Обсуждение приложений

Поскольку предложенный выше метод является *новым для анализа палеомагнитных данных*, его полезность, в смысле различения имеющихся палеомагнитных моделей, следует продемонстрировать на реальных данных. Основные цели этой демонстрации – оценить точность моделей в рамках предложенного выше подхода и показать, как учет условия на дисперсию коэффициентов влияет на оценку среднего коэффициентов. Для рассмотрения выбраны следующие модели:

- модель, предложенная в статье [Constable, Parker, 1988] – здесь и далее CP88;
- модель C1, предложенная в статье [Quidelleur, Courtillot, 1996] – здесь и далее QC96;
- модель CJ98, предложенная в статье [Constable, Johnson, 1999].

Кроме того, рассмотрим модели CP88-0, QC96-0 и CJ98-0, построенные из указанных выше моделей введением дополнительного условия $E(g_2^0)$ (т.е. предполагается, что для всех коэффициентов, кроме дипольных, $E(g_p^0) = E(h_p^0) = 0$); табл.1 содержит параметры всех задействованных моделей (осесимметричных, что следует из равенства дисперсий g_n^m и h_n^m и осесимметричности усредненного поля (см. [Hilot, Le Mouël, 1994]).

ТАБЛИЦА 1. Параметры исследуемых GGP-моделей

	CP88	QC96	CJ98	CP88-0	QC96-0	CJ98-0
$E(g_1^0)$	$-30.0\mu T$	$-30.0\mu T$	$-30.0\mu T$	$-30.0\mu T$	$-30.0\mu T$	$-30.0\mu T$
$E(g_2^0)$	$-1.8\mu T$	$-1.2\mu T$	$-1.5\mu T$	0	0	0
σ_1^0	$3.\mu T$	$3.\mu T$	$11.72\mu T$	$3.\mu T$	$3.\mu T$	$11.72\mu T$
σ_1^1	$3.\mu T$	$3.\mu T$	$1.67\mu T$	$3.\mu T$	$3.\mu T$	$1.67\mu T$
σ_2^0	$2.14\mu T$	$1.3\mu T$	$1.16\mu T$	$2.14\mu T$	$1.3\mu T$	$1.16\mu T$
σ_2^1	$2.14\mu T$	$4.3\mu T$	$4.06\mu T$	$2.14\mu T$	$4.3\mu T$	$4.06\mu T$
σ_2^2	$2.14\mu T$	$1.3\mu T$	$1.16\mu T$	$2.14\mu T$	$1.3\mu T$	$1.16\mu T$
α	$27.7\mu T$	$27.7\mu T$	$15\mu T$	$27.7\mu T$	$27.7\mu T$	$15\mu T$

Примечание. Параметр α определяет характеристики $\sigma_n^m = \sigma_n = [\alpha(c/a)^n / ((n+1)(2n+1))^{1/2}]$ для $n \geq 3$. Тестирование проводилось для суммы гармоник первых $n = 7$ порядков.

Все задействованные модели построены на основе гипотезы о независимых нормально распределенных коэффициентах в GGP (повторим еще раз – это предположение является априорным и для его прямой проверки имеющихся в настоящее время данных недостаточно), которую использует и новый метод. Традиционно, при построении моделей, оценивавших одно лишь среднее значение коэффициентов, обычно использовали дополнительное предположение: распределение направлений в любой точке является распределением Фишера; это предположение (как будет показано ниже) несовместимо с основной гипотезой о GGP. Данные (эпоха Bruhnes), использованные в этом разделе, позаимствованы из базы [Quidelleur et al., 1994] (эта база доступна в сети Интернет <http://www.ipgp.jussieu.fr/depts/PALEOMAG/VAR-SECU/Intro.html>).

Данные локализованы в 26 точках, географическое положение этих точек показано на рис. 7.

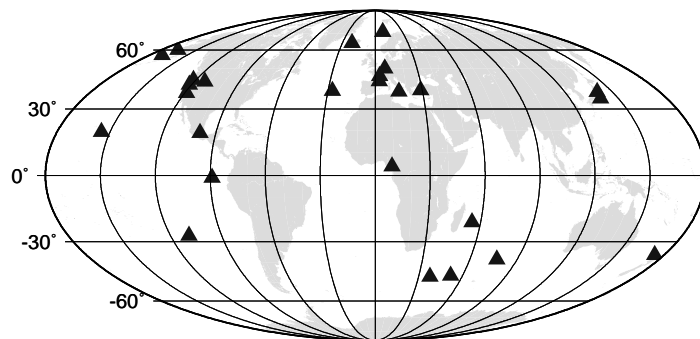


Рис. 7. Географическое положение 26 точек, отвечающих данным эпохи Brunhes

Вопрос о происхождении табл. 1 параметров распределений коэффициентов не относится прямо к материалу статьи и не рассматривается здесь (см. необходимые ссылки в статье [Khokhlov et al., 2001]); скажем только, что численные значения получены методами с существенным использованием указанного выше дополнительного предположения (распределение направлений в любой точке является распределением Фишера). Очевидно, что распределение Фишера с плотностью (в подходящей системе сферических координат)

$$f(\theta) \sim \text{const} \cdot e^{k^2 \cos \theta}$$

на сфере имеет вращательную симметрию, а в какой степени это свойство обеспечивают рассматриваемые модели?

Рассмотрим прежде всего графики линий уровня плотностей распределений для моделей QC96-0 и CJ98-0 (рис. 8) (выбраны именно эти модели вместо оригинальных QC и CJ) с тем чтобы показать, что такой симметрии модели не обеспечивают; кроме того, из них становится ясной зависимость плотностей от географической широты точки. Соглашения для этих графиков следующие: для точек в северном полушарии с широтами 0° , 10° , 20° , ..., 80° (от географической долготы ничего не зависит, так как все дисперсии g_n^m и h_n^m выбраны равными друг другу [Hulot, Le Mouél, 1994]); на соответствующих этим точкам сферах направлений построены модельные плотности распределений и проведены границы областей, различающихся по вероятности с шагом 0.1. Получившиеся кривые на поверхностях сфер спроектированы проекцией Ламберта на касательные к этим сферам плоскости, точки касания отвечают направлению *среднего вектора поля*. Таким образом, предлагаемый в статье подход как минимум указывает на внутреннюю противоречивость тех методов, которые (к сожалению) используются сегодня в построении палеомагнитных моделей.

а

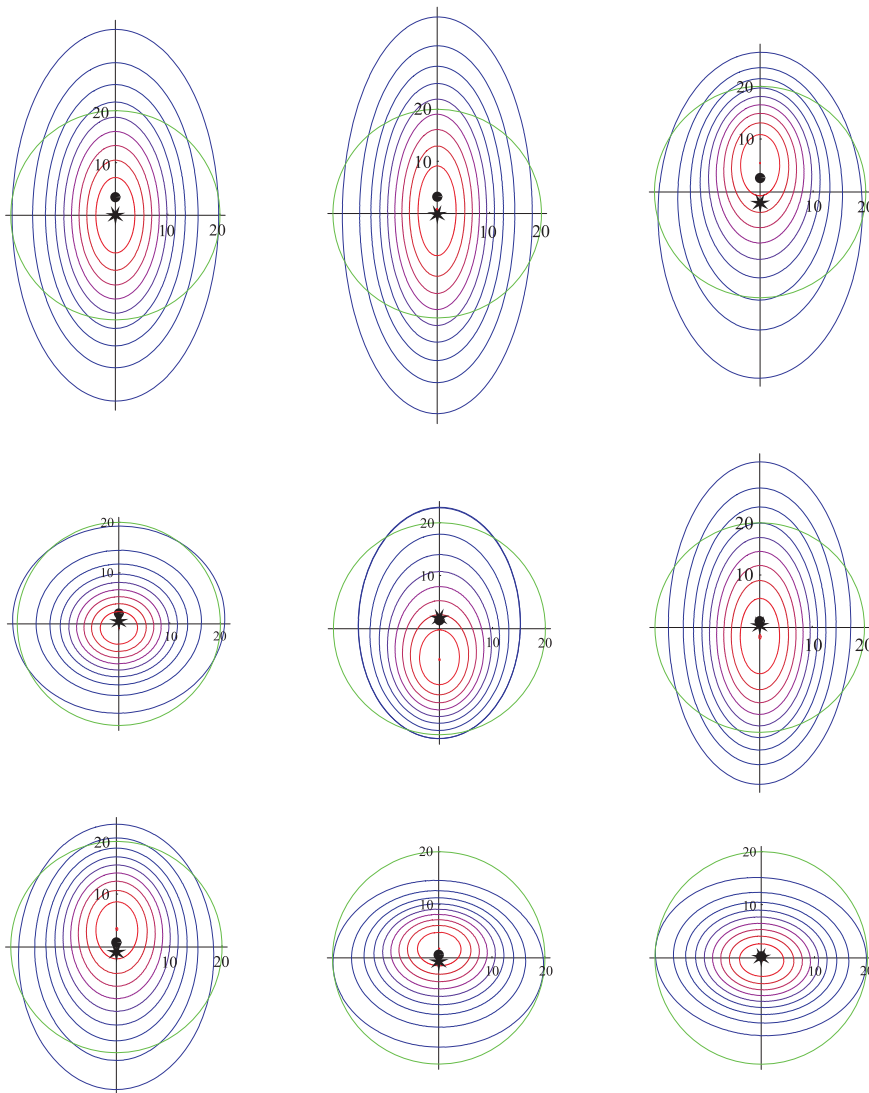
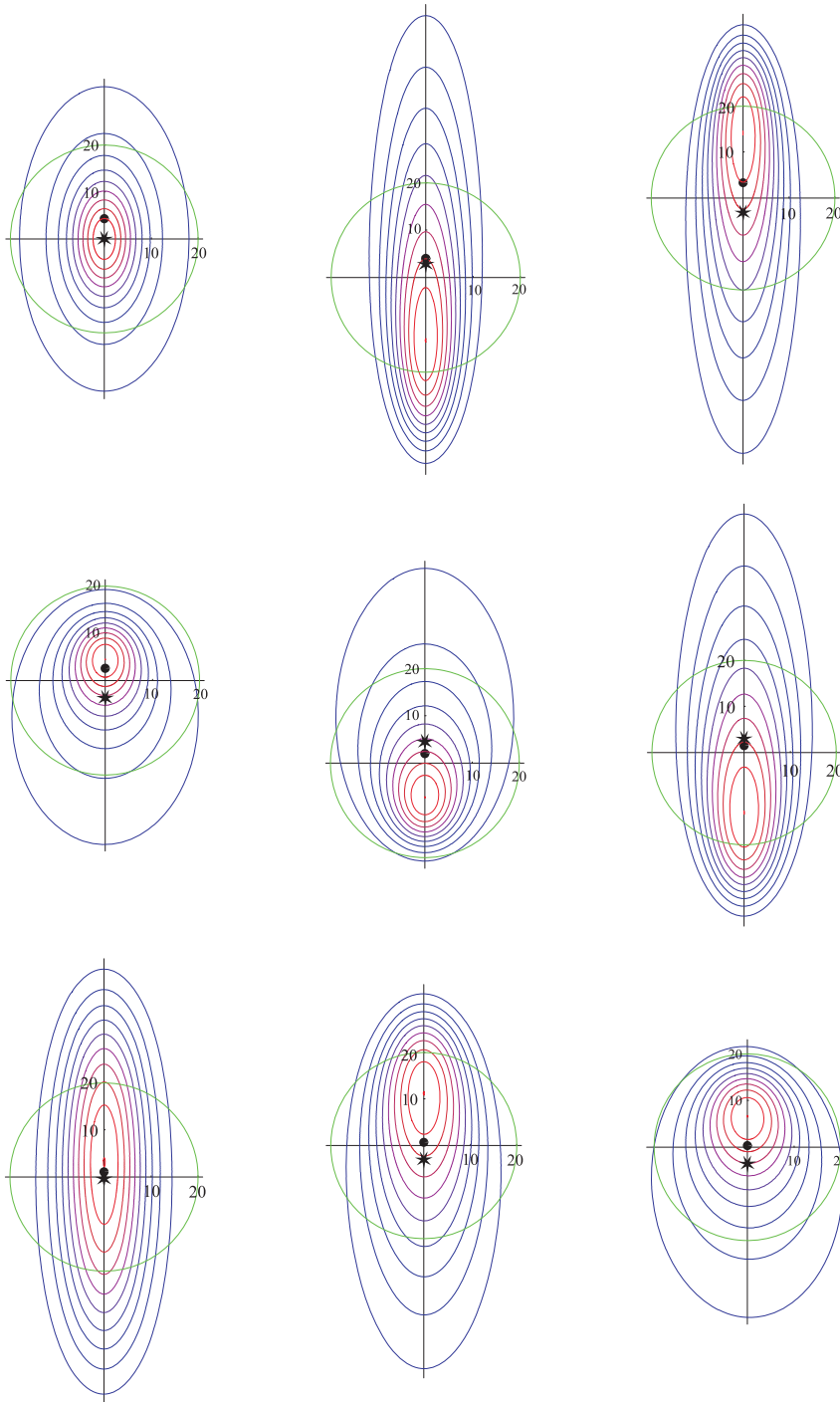


Рис. 8. Плотности распределения направлений для моделей QC96-0 и CJ98-0, построенные в географических точках $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ\text{N}$ (строка за строкой сверху вниз, начиная слева)

Оси даны в градусах, тонкая линия – окружность, отвечающая 20° -телесному углу вокруг дипольного направления. Изолинии – “эллипсы” – границы областей, в которые согласно модели попадают 10%, 20%, ... и 90% направлений. Звездочка указывает *усредненное с учетом данной плотности* направление, точка – направление среднего поля моделей. Отметим, что на центральных картинках расхождение между усреднением (звездочка) и направлением среднего (точка) достигает 5°

б



Достаточно очевидно, что плотности распределений направлений в точке в моделях QC96-0 и CJ98-0 не совпадают с распределением Фишера – соответствующие области отличны от кругов. Возможность точной единой аппроксимации (как это проделано в [Le Goff, 1990]) всех плотностей какой-либо несложной плотностью распределения (вроде часто употребительных модификаций распределения Фишера [Fisher et al., 1987; Kent, 1982]) также выглядит весьма сомнительно.

Случай моделирования среднего поля. Модели среднего поля обычно строились, исходя из *основывающегося на гипотетическом фишеровском распределении* усреднения данных (см. [Gubbins, Kelly, 1993; Johnson, Constable, 1995; Johnson, Constable, 1997; Kelly, Gubbins, 1997]). Однако примеры, приведенные выше, показывают, что такое усреднение содержательно отличается от усреднения, использующего явный вид модельной плотности. Такое корректно определенное усреднение направлений отмечено на рис. 8 звездочкой, оно вовсе не совпадает с направлением поля, построенного без учета дисперсий (на рис. 8 это последнее направление отвечает центру проекции Ламберта), несовпадение достаточно велико в сравнении с декларируемой точностью модели. (Можно отметить, что направление максимального правдоподобия, в котором достигается максимум функции плотности, также существенно отлично от направления среднего поля. (Более детальную критику существующих методов палеомоделирования см. в статье [Khokhlov et al., 2001].)

Примеры тестов, различающих модели. Для каждой из шести GGP-моделей CP88, QC96, CJ98 и CP88-0, QC96-0, CJ98-0 применим описанную методику. Полученную выборку $\{\eta_i\}$ значений из $[0, 1]$ проверим двумя стандартными инструментами: тестом Колмогорова–Смирнова (KS-тест) и χ^2 -тестом (реализацию которого можно найти, например, в [Press et al., 1996]).

Тест Колмогорова–Смирнова не требует никаких дополнительных параметров, его известная особенность состоит в относительно бóльшей чувствительности (к отклонениям эмпирического распределения выборки $\{\eta_i\}$ от равномерного) в середине отрезка $[0, 1]$, чем на его краях. Напротив, χ^2 -тест требует введения некоторых дополнительных параметров (интервалов дискретизации), что, вообще говоря, оставляет возможность организовать ”повышенную чувствительность” как раз на концах отрезка.

Для наших демонстрационных целей был выбран χ^2 -тест с пятью степенями свободы, использующий деление отрезка $[0, 1]$ на шесть интервалов, а именно: $[0, 0.1)$, $[0.1, 0.25)$, $[0.25, 0.5)$, $[0.5, 0.75)$, $[0.75, 0.9)$, $[0.9, 1]$. Это деление задает ”пристрастное” отношение к поведению дан-

ных именно в крайних интервалах деления.

Результаты в смысле локального тестирования всех шести моделей (в географической точке, лежащей на территории Франции) показаны на рис. 9. Изолинии на рис. 9 отмечают области, в которых ожидаются 10%, 25%, 50%, 75% и 90% всех направлений, χ^2 -тест учитывает согласование данных с этим предсказанием. В KS-тесте анализируется максимум отклонения эмпирической функции распределения от теоретической, которая для равномерного распределения на $[0, 1]$ есть просто прямая линия. Результаты локального тестирования, включающие рассмотрение еще двух (Гавайи, Реюньон) географических точек, приводятся в табл. 2. Основное наблюдение над числами в этой таблице состоит в том, что точность модели сильно различается от одной географической точке к другой.

ТАБЛИЦА 2. Региональные и глобальные результаты применения тестов χ^2 и KS для шести GGP-моделей

Регион	N	CP88		QC96		CJ98		CP88-0		QC96-0		CJ98-0	
		χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS
Франция	38	0.98	0.72	0.44	0.46	0.97	0.82	0.79	0.30	0.60	0.64	0.99	0.88
Гавайи	112	0.98	1.00	0.79	0.76	1.00	1.00	1.00	1.00	0.42	0.66	1.00	1.00
Реюньон	44	0.26	0.50	0.03	0.00	0.80	0.28	0.71	0.90	0.13	0.10	0.85	0.71
Все 26	944	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Примечание. Приведены пары для χ^2 -теста и KS-теста соответствующих вероятностей, что модель несовместима с данными, N – число наблюдений

Для глобального χ^2 -теста (т.е. проверки объединенной по всем 26 географическим точкам выборки $\{\eta_i\}$) не представляется возможным построить картинку в духе рис. 9. Несколько неожиданный вывод из табл. 2 и 3 состоит в том, что никакая из шести моделей не выдерживает тестирования, во всяком случае в рамках общепринятых критериев принятия/отбрасывания гипотез.

ТАБЛИЦА 3. Глобальные результаты применения тестов χ^2 и KS

	CP88		QC96		CJ98		CP88-0		QC96-0		CJ98-0	
	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS	χ^2	KS
все 26	39.0	0.06	25.4	0.08	19.5	0.06	841.5	0.29	1658.	0.40	18.5	0.06

Примечание. Показаны соответствующие статистики χ^2 и KS

Тем не менее из анализа полученных наблюдаемых значений χ^2 и D для χ^2 - и KS-тестов можно заключить (см. табл. 3), что не все модели одинаково плохи, среди них есть как наилучшая, так и наихудшая.

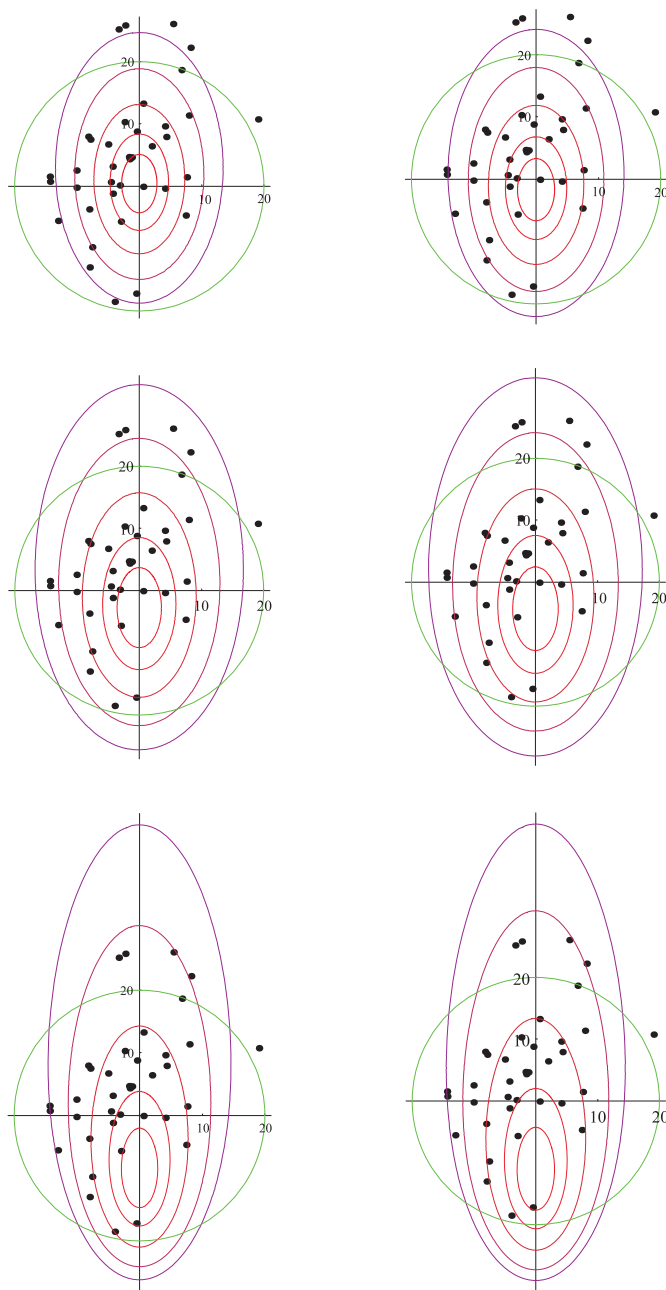


Рис. 9. Плотности распределения направлений в различных моделях вместе с данными (точка на территории Франции): модель CP88 (верх слева), CP88-0 (верх справа), QC96 (середина слева), QC96-0 (середина справа), CJ98 (внизу слева) и CJ98-0 (внизу справа). Эллипсообразные кривые ограничивают области, в которые по соответствующей модели попадают 10%, 25%, 50%, 75% и 90% всех направлений

Так, например, CP88, QC96 и CJ98 отвечают достаточно сходным показателям, KS-тест утверждает, что QC96 модель несколько хуже остальных. Тест χ^2 в общем демонстрирует то же самое. При этом похоже, что недостатки ранних моделей корректируются в более поздних: модель [Cjnstable, Johnson, 1999] выглядит лучше по результатам обоих глобальных тестов среди оригинальных (т.е. среди CP88, QC96 и CJ98). Несколько обескураживает то, что вполне искусственным образом придуманная модель CJ98-0 оказалась "самой нехудшей" среди всех, более детальное рассмотрение этой модели указывает, как учет дисперсий может влиять на оценку средних в случае работы с данными по направлениям (т.е. с нечисловыми распределениями).

Это рассмотрение претендует лишь на демонстрацию возможностей предложенного в этом разделе метода, который является частью *прямого* (см. [Blakely, 1996]) подхода при построении модельного решения. Систематические применения с использованием представительных данных (например, [McElhinny, McFadden, 1997]) еще не опубликованы и оставлены за рамками материала статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе Задача с наклонной производной в трехмерном пространстве // ДАН СССР. 1963. Т.13. С.123–131.
2. Владимиров В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Мизогата С. Терия уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977.
4. Яновский Б. Земной магнетизм. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978.
5. Arnold V. Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions // Topological methods in nonlinear analysis. J. of the Juliusz Schauder Center. 1996. Vol.7. P.205–217.
6. Backus G. Application of a non-linear boundary value problem for Laplace's equation to gravity and geomagnetic intensity surveys // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1968. Vol.2. P.195–221.
7. Backus G. Non-uniqueness of the external geomagnetic field determined by surface intensity measurements // J. Geophys. Res. 1970. Vol.75. P.6339–6341.
8. Backus G. Determination of the external geomagnetic field from intensity measurements // Geophys. Res. Lett. 1974. Vol.1, N 21.
9. Backus G., Parker V., Constable C. Foundations of geomagnetism. Cambridge University Press, 1996.
10. Barraclough D.R. Spherical harmonic analyses of the geomagnetic field for eight epochs between 1600 and 1910 // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1974. Vol.36. P.497–513.
11. Barraclough D.R., Nevitt C.E. The effect of observational errors on geomagnetic field models based solely on total intensity measurements // Phys. Earth Planet. Inter. 1976. Vol.13. P.123–131.
12. Blakely R.J. Potential theory in gravity and magnetic applications. Cambridge University Press, 1996.

13. *Bloxham J., Gubbins D.* The secular variation of the Earth's main magnetic field // *Nature*. 1985. Vol.317. P.777–781.
14. *Bloxham J., Jackson A.* Time-dependent mapping of the magnetic field at the core-mantle boundary // *J. Geophys. Res.* 1992. Vol.97. P.19537–19563.
15. *Carlut J.* Analysis of the mean and variance of the Earth's magnetic field over the last 5 million years // *AGU97 abstract book*, GP22B-1. 1997.
16. *Carlut J., Courtillot V.* How complex is the Earth's average magnetic field? // *J. Int. Geoph.* 1998 (to appear).
17. *Constable C., Johnson C.* Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables // *Earth Planet. Sci. Lett.* 1999. Vol.115. P.35–51.
18. *Constable C., Parker R.* Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 Myr // *J. Geophys. Res.* 1988. Vol.93. P.11569–11581.
19. *Constable S., Parker R., Constable C.* Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data // *Geophysics*. 1987. Vol.52. P.289–300.
20. *Courtillot V., Valet J-P., Hulot G., Le Mouél J.L.* The Earth's magnetic field: Which geometry? // *E.O.S. Trans. AGU*, 1992. Vol.73, N 337. P.340–342.
21. *Fisher N.I., Lewis T., Embleton B.J.J.* Statistical analysis of spherical data. Cambridge University Press, 1987.
22. *Gavrand O., Khokhlov A., Le Mouél J.L., Leger J.M.* On the calibration of a vectorial ⁴He pumped magnetometer // *Earth Planets Space*. 2001. Vol.53. P.949–958.
23. *Gubbins D., Kelly P.* Persistent patterns in the geomagnetic field over the past 2.5 Myr // *Nature*. 1993. Vol.365. P.829–832.
24. *Holme R., Bloxham J.* Alleviation of the Backus effect in geomagnetic field modelling // *Geophys. Res. Lett.* 1995. Vol.22. P.1641–1644.
25. *Hongre L., Hulot G., Khokhlov A.* An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1998. Vol.106. P.311–335.
26. *Hulot G., Le Mouél J-L.* A statistical approach to the Earth's main magnetic field // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1994. Vol.82. P.167–183.
27. *Hulot G., Khokhlov A., Le Mouél J.L.* Uniqueness of mainly dipolar magnetic field recovered from directional data // *Geophys. J. Inter.* 1997. Vol.129. P.347–354.
28. *Hurwitz L., Knapp D.G.* Inherent vector discrepancies in geomagnetic main field models based on scalar F // *J. Geophys. Res.* 1974. Vol.79. P.3009–3013.
29. *Johnson C., Constable, C.* The time-averaged field as recorded by lava flows over the past 5 Myr // *Geophys. J. Inter.* 1995. Vol.122. P.489–519.
30. *Johnson C., Constable C.* The Time-averaged geomagnetic field: global and regional biases for 0-5, submitted to // *Geophys. J. Int.* 1997.
31. *Kaiser R., Neudert M.* A non-standard boundary value problem related to geomagnetism. (Личное сообщение, статья в стадии подготовки). 2003.
32. *Kellogg O.D.* Foundations of potential theory. Dover Publ., New York: 1953.
33. *Kelly P., Gubbins D.* The geomagnetic field over the past 5 million years // *Geophys. J. Int.* 1997. Vol.128. P.1–16.
34. *Kent J.T.* The Fisher-Bingham distribution on the sphere // *J. Roy. Statist. Soc.* 1982. Vol.B44. P.71–80.
35. *Khokhlov A., Hulot G., Le Mouél J.L.* On the Backus Effect – I // *Geophys. J. Inter.* 1997. Vol.130. P.701–703.
36. *Khokhlov A., Hulot G., Le Mouél J.L.* On the Backus Effect – II // *Geophys. J. Inter.* 1999. Vol.137. P.816–820.
37. *Khokhlov A., Hulot G., Carlut J.* Towards a self-consistent approach to paleomagnetic field modelling // *Geophys. J. Inter.* 2001. Vol.145. P.151–171.
38. *Knuth D.* The art of computer programming, 2nd ed., Addison-Wesley, MA, 1981.
39. *Kullback S.* Information theory and statistics. New York: Dover Publ., 1968.

40. *Kono M.* Uniqueness problems in the spherical harmonic analysis of the geomagnetic field direction data // *J. Geomagn. Geoelec.* 1976. Vol.28. P.11–29.
41. *Kono M., Tanaka H.* Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation // *J. Geomag. Geoelectr.* 1995. Vol.47. P.115–130.
42. *Kono M., Tanaka H., Tsunakawa H.* Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data, the case of linear mapping // *J. Geophys. Res.* 2000. Vol.105. P.5817–5833.
43. *Lee S.* A study of the time-averaged paleomagnetic field for the last 195 million years. PhD thesis, Australian Natl. Univ. Canberra, 1983. 357 p.
44. *Le Goff M.* Lissage et limites d'incertitude des courbes de migration polaire - pondération des données extension bivariate de la statistique de Fisher // *C.R. Acad. Sci.* 1990. Vol.3111. P.1191–1198.
45. *Lowes J.F.* Vector errors in spherical harmonic analysis of scalar data // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1975. Vol.42. P.637–651.
46. *Lowes J.F., Martin J.E.* Optimum use of satellite intensity and vector data in modelling the main geomagnetic field // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1987. Vol.48. P.183–192.
47. *Lowes F., De Santis A., Duka B.* A discussion of the uniqueness of a Laplacian potential when given only partial field information on a sphere // *Geophys. J. Inter.* 1995. Vol.121. P.579–584.
48. *Maganini R.* A fully nonlinear boundary value problem for the Laplace equation // *Lecture Notes Pure Appl. Math.* 1987. Vol.109. P.327–330.
49. *Mardia K.V.* Statistics of directional data. Academic Press, 1972.
50. *Maxwell J.C.* Traité d'Electricité et de Magnetisme I. Gauthier - Villars, Paris. 1885.
51. *McElhinny M., McFadden P.* Paleosecular variation over the past 5Myr based on a new generalized database // *Geophys. J. Inter.* 1997. Vol.131. P.240–252.
52. *McElhinny M., McFadden P., Merrill R.* The time-averaged paleomagnetic field 0-5My the Earth // *J. Geophys. Res.* 1996. Vol.101. P.25007–25027.
53. *Mitrea M.* Clifford wavelets, singular integrals and hardy spaces // *Lecture Notes in Math.* 1994. Vol.1575.
54. *Payne L.E., Schaefer P.W.* Some nonstandard problems for the Poisson equation // *Quart. of Appl. Math.* 1993. Vol.51. P.81–90.
55. *Press C., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B.* Numerical recipes in C. Second edition. Cambridge, 1996 (see also www.nr.com).
56. *Proctor M.R.E., Gubbins D.* Analysis of geomagnetic directional data // *Geophys. J. Inter.* 1990. Vol.100. P.69–77.
57. *Quidelleur X., Courtillot V.* On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1996. Vol.95. P.55–77.
58. *Quidelleur X., Valet J.-P., Courtillot V., Hulot G.* Long-term geometry of the geomagnetic field for the last five million years: an updated secular variation database // *Geophys. Res. Lett.* 1994. Vol.15. P.1639–1642.
59. *Stern D.P., Bredekamp J.H.* Error enhancement in geomagnetic models derived from scalar data // *J. Geophys. Res.* 1975. Vol.80. P.1776–1782.
60. *Ultré-Guérard P., Hamoudi M., Hulot G.* Reducing the Backus effect given some knowledge of the dip-equator/ *Geophys. Res. Lett.* 1998. Vol.25, N 16. P.3201–3204.
61. *Wilson R.L.* Permanent aspects of the Earth's non-dipole magnetic field over upper Tertiary times // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1970. Vol.19. P.417–437.
62. *Wilson R.L.* Dipole offset: the time-averaged paleomagnetic field over the past 25 million years // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 1971. Vol.22. P.491–504.
63. *Zmuda A.J.* A method for analyzing values of the scalar magnetic intensity // *J. Geophys. Res.* 1958. Vol.63. P.477–490.