УДК 550.3

ЛИНЕЙНАЯ И НЕЛИНЕЙНАЯ САМОМОДУЛЯЦИЯ ТЕРМОКОНВЕКТИВНЫХ ВОЛН. ГРУППОВЫЕ СОЛИТОНЫ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Б.И. БИРГЕР

Объединенный институт физики Земли Российской академии наук, Москва

Анализируется термоконвективная неустойчивость верхнего холодного погранслоя, сформированного крупномасштабной мантийной конвекцией. Линейная интегральная (имеющая память) реологическая модель применяется для течений, связанных с малыми деформациями. При такой реологии неустойчивость имеет колебательный характер, а надкритичность мала, что позволяет использовать ее как малый параметр теории возмущений. Применение теории нелинейной устойчивости позволяет найти решение в виде стационарных термоконвективных волн, независящих от начальных возмущений. Модуляция этих волн описывается групповым солитоном.

LINEAR AND NONLINEAR SELF-MODULATION OF THERMOCONVECTIVE WAVES. GROUP SOLITONS AND THEIR INTERACTION

B.I. BIRGER

United Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow

Thermoconvective instability of the upper cold boundary layer formed by the large-scale mantle convection is analysed. The linear integral (having a memory) rheological model is used for flows associated with small strains. For such a rheology, the instability is oscillatory and the supercriticality is small. The supercriticality is considered as a small parameter and perturbation methods are used. The application of nonlinear stability theory permits to find an asymptotic solution in the form of steady thermoconvective waves independent of the initial conditions. The modulation of these waves is described by a group soliton.

Введение

В работе [1] была предложена новая нелинейная наследственная (обладающая памятью) реологическая модель мантии Земли. Она сводится к модели степенно́й неньютоновской жидкости для стационарных течений и к линейной наследственной модели Андраде для течений, связанных с малыми деформациями. При стационарной тепловой конвекции в мантии образуется верхний холодный неподвижный погранслой (литосфера), в котором имеется вертикальный градиент температуры.

Конвективная неустойчивость литосферы реализуется в виде термоконвективных волн. В результате интерференции волн, распространяющихся навстречу друг другу, образуются стоячие волны (термоконвективные колебания) [2]. Термоконвективные колебания рассматриваются как механизм формирования осадочных бассейнов на континентальных кратонах. В работах [1, 2] исследовалась реологически однородная литосфера, характеризуемая усредненным по глубине значением параметра Андраде. В работе [3] учитывалась реологическая неоднородность литосферы, где параметр Андраде сильно зависит от температуры и меняется с глубиной. И в однородной, и в неоднородной модели минимальное критическое число Рэлея Ra_m оказывается близким к актуальному для литосферы (под кратоном) значению числа Рэлея Ra. Таким образом, континентальная литосфера находится в режиме пороговой неустойчивости. Если $\mathrm{Ra} \leq \mathrm{Ra}_m$, линеаризованные уравнения конвективной неустойчивости и не слишком большое начальное возмущение температуры полностью определяют эволюцию возмущения в литосфере. Чем больше Ra_m по сравнению с Ra, тем сильнее затухают термоконвективные волны. При достаточно малом превышении Ra_m над Ra затуханием можно пренебречь [2]. Если $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_m$, начальное возмущение нарастает со временем, и на достаточно больших временах использование линеаризованных уравнений становится незаконным.

Настоящая работа посвящена рассмотрению случая, когда Ra незначительно превосходит Ra_m (малая надкритичность). Задача решается в упрощенной постановке: литосфера моделируется как однородный слой со "свободными" границами. Такая постановка позволяет построить простое аналитическое решение нелинейной задачи и понять качественные особенности течений, возникающих в литосфере при малой надкритичности.

Основные уравнения

Линейная наследственная реологическая модель литосферы (модель Андраде), справедливая при малых деформациях, определяется интегральным соотношением

$$2e_{ij} = \int_{-\infty}^{t} K(t-t_1)\sigma_{ij}(t_1)dt_1. \tag{1}$$

Здесь e_{ij} и σ_{ij} – тензоры девиаторов деформаций и напряжений, соответственно, t – время, $K(t)$ – интегральное ядро ползучести

$$K(t) = t^{-2/3}/3A, \tag{2}$$

где A – реологический параметр Андраде. Ядро ползучести определено таким образом, что в случае, когда в начальный момент времени $t = 0$ приложено постоянное напряжение, деформация зависит от времени как $t^{1/3}$ (закон Андраде для неустановившейся ползучести). Реологическое соотношение (1) можно переписать в виде [1]

$$\sigma_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{t} \Pi(t - t_1)\dot{e}_{ij}(t_1)dt_1, \tag{3}$$

где $\Pi(t)$ – функция памяти

$$\Pi(t) = 3At^{-1/3}/\Gamma(1/3)\Gamma(2/3),$$

а $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Континентальная литосфера представляет собой верхний холодный неподвижный погранслой, который образуется при развитой тепловой конвекции под континентом. Уравнения конвективной неустойчивости погранслоя выписываются в виде

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0,\\
&-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \mathrm{Ra} \cdot \theta = 0,\\
&\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nu_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu_z \frac{\partial \theta}{\partial z} - \nu_z - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\theta = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где x и z – горизонтальная и вертикальная координаты; ν_i – скорость, θ и p – возмущения температуры и давления, соответственно. Задача о неустойчивости решается в двумерной постановке. Система уравнений (4) записана в безразмерном виде. Масштаб длины – толщина литосферы d, масштаб температуры – перепад температуры ΔT между горячей нижней поверхностью слоя и холодной верхней (обе поверхности предполагаются изотермическими). Масштаб времени – $d^2/\varkappa$, где $\varkappa$ – температуропроводность, масштаб скорости – $\varkappa/d$. Для ньютоновской жидкости обычно принимается масштаб напряжения (и давления) $\varkappa\eta/d^2$, а число Рэлея определяется как $\mathrm{Ra} = \rho g \alpha T d^3/\eta\varkappa$, где ρ – плотность, α – коэффициент теплового расширения, g – гравитационное ускорение, η – ньютоновская вязкость, имеющая размерность Па с. Для реологической среды Андраде (параметр Андраде A имеет размерность Па с$^{1/3}$) введем масштабную вязкость

$$\eta_A = A(d^2/k)^{2/3},$$

где A – усредненное по глубине значение параметра Андраде. Тогда число Рэлея определено как

$$\mathrm{Ra} = \rho g \alpha \Delta t d^3/\eta_A \varkappa = \rho g \alpha \Delta T d (d^2/\varkappa)^{1/3}/A, \tag{5}$$

а масштаб напряжения как $\eta_A \varkappa/d^2 = A(d^2/\varkappa)^{-1/3}$.

Введенные масштабы не меняют вида реологических соотношений (1)–(3), в которых следует только заменить параметр Андраде A на 1.

Литосфера характеризуется следующими значениями физических параметров:

$$\begin{gathered} d = 2\cdot 10^5\,\text{м}, \quad \Delta T = 1300\,\text{К}, \quad \alpha = 3\cdot 10^{-5}\,\text{К}^{-1}, \quad \rho = 3.3\cdot 10^3\,\text{кг}\,\text{м}^{-3}, \\ g = 10\,\text{м}\,\text{с}^{-2}, \quad \varkappa = 10^{-6}\,\text{м}^2\,\text{с}^{-1}, \quad A = 10^{12}\,\text{Па}\,\text{с}^{1/3} \end{gathered} \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует, что число Рэлея оценивается как $\mathrm{Ra} \approx 100$.

Лабораторные оценки реологического параметра Андраде и его зависимости от температуры и давления приведены в работе [3]. Значение параметра Андраде (6) получено в результате усреднения по глубине литосферы.

Если верхнюю и нижнюю границы литосферы считать "свободными", граничные условия записываются как

$$z = 0, z = 1, \qquad v_z = \sigma_{xz} = \theta = 0. \tag{7}$$

Решение линеаризованных уравнений

Линейный анализ конвективной неустойчивости, при котором отбрасываются нелинейные члены в последнем уравнении системы (3) (уравнении теплового баланса), приводит к решению в виде конвективных волн

$$\nu_z = BE\sin \pi z, \quad \nu_x = BE\frac{i\pi}{k}\cos \pi z, \quad \theta = BEF(\omega)\frac{(k^2+\pi^2)^2}{\mathrm{Ra}k^2}\sin \pi z, \tag{8}$$

где

$$E = \exp[i(kx+\omega t)].$$

Здесь B – произвольный комплексный множитель, k – волновое число, ω – комплексная частота (ее мнимая часть описывает затухание волны), $F(\omega)$ – комплексная вязкость среды

$$F(\omega) = \Pi^*(i\omega) = 1/i\omega K^*(i\omega), \qquad K^*(i\omega) = \int_0^\infty K(t_1)\exp(-i\omega t_1)dt_1,$$

где $K^*(i\omega)$ – лапласовское изображение ядра ползучести, а $\Pi^*(i\omega)$ – лапласовское изображение функции памяти. Комплексная частота связана с волновым числом дисперсионным соотношением

$$i\omega F(\omega)(k^2+\pi^2)^2 + F(\omega)(k^2+\pi^2)^3 - \mathrm{Ra}k^2 = 0. \tag{9}$$

Дисперсионное соотношение (9) позволяет найти такое значение Ra_m числа Рэлея, называемое минимальным критическим числом Рэлея, при котором не затухает только волна с волновым числом $k = k_m$ и частотой $\omega = \omega_m$.

Комплексная вязкость для реологической модели Андраде имеет вид

$$F(\omega) = (1/3)\Gamma(1/3)(i\omega)^{-2/3}, \quad (1/3)\Gamma(1/3) \approx 1, \tag{10}$$

где Ra_m, k_m и ω_m принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} &k_m = \sqrt{3}\pi/2 \approx 2.7, \qquad \omega_m = \sqrt{3}(k_m^2+\pi^2) = 7\sqrt{3}\pi^2/4 \approx 30, \\ &\mathrm{Ra}_m = 3^{-1/3}2(k_m^2+\pi^2)^{7/3}/k_m^2 \approx 150. \end{aligned} \tag{11}$$

Как следует из (5), (6) и (11), число Рэлея для литосферы – того же порядка, что и Ra_m. Таким образом, литосфера находится в состоянии, близком к режиму пороговой неустойчивости.

Вообще говоря, в уравнениях (9) и (11) следует писать $n\pi$ (где $n = 1, 2, 3\ldots$) вместо π. Рассматриваемая задача есть задача на собственные значения. Собственными значениями являются критические числа Рэлея, для которых частоты волн – действительные числа. Имеется бесконечный набор собственных значений и собственных функций, но минимальное критическое число Рэлея соответствует значению $n = 1$. Предполагая, что Ra несколько выше, чем Ra_m, введем надкритичность

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{Ra} - \mathrm{Ra}_m}{\mathrm{Ra}_m}}$$

как малый параметр задачи.

Рассмотрим сначала в рамках линейной теории эффект самомодуляции термоконвективных волн. Этот эффект связан с тем, что, когда $\mathrm{Ra} > \mathrm{Ra}_m$, не затухает не только конвективная мода с волновым числом k_m, но и моды, волновые числа которых близки к k_m. Разложим комплексную частоту в ряд по степеням $k - k_m$ и ε в окрестности ω_m

$$i\omega = i\omega_m + iV(k-k_m) - a(k-k_m)^2 + b\varepsilon^2 + \ldots . \tag{12}$$

Коэффициент V имеет смысл групповой скорости пакета термоконвективных волн. Подставляя разложение (12) в дисперсионное соотношение (9), находим, что для среды Андраде

$$V = 3\pi, \quad a = \frac{1}{7}(72 + i\sqrt{3}), \quad b = \frac{3}{4}\pi^2(9 + i\sqrt{3}. \tag{13}$$

Как следует из (11) и (12), незатухающими являются волны, волновые числа которых лежат в интервале

$$|k - k_m| \leq r, \quad r = \varepsilon\left(\frac{\operatorname{Re} b}{\operatorname{Re} a}\right)^{1/2} = \varepsilon\pi\sqrt{\frac{21}{32}}.$$

Зададим начальное возмущение температуры $\theta_0(x, z)$, где $0 \leq z \leq 1$, разложим $\theta_0(x, z)$ в ряд Фурье по функциям $\sin n\pi z$ и, согласно сказанному выше, сохраним только первый член ($n = 1$) в разложении. Тогда

$$\theta_0(x, z) = \theta_0(x)\sin \pi z.$$

Функцию $\theta_0(x)$ представим в виде интеграла Фурье

$$\theta_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_0(k)\exp(ikx)dk,$$

где $\Theta_0(k)$ – изображение Фурье

$$\Theta_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta_0(x)\exp(-ikx)dx.$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию, записывается в виде

$$\theta_0(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Theta_0(k)\exp[i(kx + \omega(k)t)]dk. \tag{14}$$

Подставляя в (14) разложение (12), произведя замену переменного $u = k - k_m$ и применяя метод перевала [2], получаем асимптотическую оценку интеграла (14)

$$\theta_0(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{at}}\Theta_0(k_m)E_m\exp\left(b\varepsilon^2 t - \frac{(x + Vt)^2}{4at}\right), \tag{15}$$

$$E_m = \exp[i(k_m x + \omega_m t)].$$

Формула (15) справедлива при $|a|t \gg 1$, т.е. при достаточно больших временах $t \gg 0.1$. Решение получено для комплексной вязкости (10), которая зависит от частоты ω, но не зависит от t. Выражение (10) соответствует случаю, когда термоконвективная волна распространяется бесконечно долгое время до момента наблюдения. На самом деле это не так: возмущение появляется в начальный момент $t = 0$. Однако выражение (10), а, следовательно, и полученное решение справедливо при условии $\omega_m t \gg 1$, т.е. на достаточно больших временах, прошедших с момента возникновения возмущения. Поскольку $\omega_m \approx 30$, условие $\omega_m t \gg 1$ выполняется при $t \gg 0.1$.

Соотношение (15) получено в рамках линейной теории, применимость которой накладывает ограничение сверху на время t

$$\operatorname{Re} b\varepsilon^2 t \ll 1 \tag{16}$$

где, согласно (13), $\operatorname{Re} b \approx 66.5$.

В случае, когда начальное возмущение температуры происходит в точке $x = 0$, функция $\theta_0(x)$ и ее изображение Фурье принимают вид

$$\theta_0(x) = \Theta_0 \delta(x), \qquad \Theta_0(k) = \Theta_0/2\pi.$$

Если начальное возмущение задано в виде

$$\theta_0(x) = \theta_0, \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2},$$

$$\theta_0(x) = 0, \quad x < -\frac{1}{2}, \quad x > \frac{1}{2},$$

изображение Фурье принимает вид

$$\Theta_0(k) = \theta_0 \frac{\sin(kl/2)}{\pi k};$$

откуда следует, что

$$\Theta_0(k_m) = \frac{\theta_0 l}{2\pi}$$

при $k_m l \ll 1$.

Введем новые переменные, характеризующие медленное изменение амплитуды:

$$\tau = \varepsilon^2 t, \qquad \xi = \varepsilon(x + Vt).$$

Тогда полученное в рамках линейной теории уравнение (15) можно интерпретировать следующим образом: формулы (8) справедливы и в том случае, когда учитывается эффект самомодуляции, если положить в них $k = k_m$, $\omega = \omega_m$, $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_m$, а под B понимать функцию τ и ξ

$$B = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\Theta_0(k_m)\frac{\mathrm{Ra}_m k_m^2}{F(\omega_m)(k_m^2+\pi^2)^2}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}\exp\left(b\tau - \frac{\xi^2}{4a\tau}\right), \tag{17}$$

где, как следует из (11),

$$\frac{\mathrm{Ra}_m k_m^2}{F(\omega_m)(k_m^2+\pi^2)^2} = \frac{7}{2}\pi^2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right).$$

Правую часть равенства (17) можно представить в виде

$$B = |B|\exp(i\varphi),$$

$$\text{где } |B| = \sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\Theta_0(k_m)\frac{7}{2}\pi^2\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}\exp\left(\tau\mathrm{Re}\, b - \frac{\xi^2}{4\tau}\frac{\mathrm{Re}\, a}{|a|^2}\right)$$

$$\text{и } \varphi = \frac{\pi}{3} + \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Re}\, a - |a|}{\mathrm{In} a}\right) + \tau\mathrm{Im}\, b + \frac{\xi^2}{4\tau}\frac{\mathrm{Im}\, a}{|a|^2}.$$

Здесь $|B(\xi,\tau)|$ и $\varphi(\xi,\tau)$ описывают амплитудную и фазовую модуляцию, а a определено уравнениями (13).

Согласно (17), при $t \to \infty$ функция $B(\tau,\xi)$ стремится к бесконечности. Наличие нелинейности в исходных уравнениях (4) оказывает стабилизирующее влияние на пакет конвективных волн.

Решение нелинейных уравнений

Решение нелинейной краевой задачи (4), (7) ищем в виде степенного ряда по малому параметру ε с коэффициентами, периодическими по x и t,

$$f = f^{(0)} + f^{(1)}E_m + \overline{f^{(1)}}E_m^{-1} + f^{(2)}E_m^2 + \overline{f^{(2)}}E_m^{-2} + \dots, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= \varepsilon f^{(11)} + \varepsilon^2 f^{(12)} + \varepsilon^3 f^{(13)} + \dots, \\ f^{(0)} &= \phantom{\varepsilon f^{(11)} +} \varepsilon^2 f^{(02)} + \varepsilon^3 f^{(03)} + \dots, \\ f^{(2)} &= \phantom{\varepsilon f^{(11)} +} \varepsilon^2 f^{(22)} + \varepsilon^3 f^{(23)} + \dots, \end{aligned}$$

f обозначает любую из искомых переменных ν_x, v_z, θ, p, σ_{ij}, черта сверху – комплексное сопряжение, $f^{(ln)}$ являются функциями z, τ и ξ.

Подставляя (18) в исходные уравнения и приравнивая нулю коэффициенты при $\varepsilon^n E_m^l$, получаем цепочку уравнений, из которых можно последовательно найти все $f^{(ln)}(z,\tau,\xi)$. Уравнения для $f^{(11)}(z,\tau,\xi)$ совпадают с уравнениями линейной теории, и их решение записываем в виде (8), где теперь $k = k_m$, $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ra}_m$, а B – неизвестная функция τ и ξ. Из условия разрешимости уравнений для $f^{(13)}$ находим, что комплексная амплитуда $B(\tau,\xi)$ удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} - a\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} - bB + cB|B|^2 = 0, \tag{19}$$

где a и b для среды Андраде заданы равенствами (13), а $c = b/14\pi^2$. Прямой подстановкой легко показать, что найденная в рамках линейной теории модулированная амплитуда (17) удовлетворяет уравнению (19), в котором отброшен нелинейный член.

Уравнение (19) совпадает с известным уравнением Стюартсона-Стюарта [4], полученном при рассмотрении математически близкого вопроса о нелинейной устойчивости течения Пуазейля. Численные значения комплексных коэффициентов a, b и c в нашей задаче, однако, другие, что для такого рода уравнений является принципиальным и приводит к качественно отличающимся решениям [5].

Решение уравнения (19) выписывается в виде

$$B = C\exp(i\nu\tau)[\mathrm{sech}(p\xi)]^{1+iq}, \tag{20}$$

где

$$|C|^2 \approx 14\pi^2, \quad \nu \approx 0.39\pi^2, \quad p \approx 0.045\pi, \quad q \approx -18. \tag{21}$$

Это решение описывает самомодуляцию термоконвективных волн в среде Андраде и имеет вид солитона, убывающего при $|\xi| \to \infty$ по закону гиперболического секанса.

Комплексную амплитуду B, определяемую (20), можно представить в виде

$$B = |B|\exp(i\varphi),$$

где $|B| = |C|\mathrm{sech}(p\xi)$ описывает амплитудную модуляцию,

$$\varphi = \varphi_C + \nu\tau + q\ln(\mathrm{sech}(p\xi)), \tag{22}$$

описывает фазовую модуляцию. Фазовый сдвиг φ_C соответствует комплексному множителю C в (20). Слагаемое $\nu\tau$ в правой части равенства

(22) можно опустить, но тогда следует ввести поправку к частоте ω_m, заменив ее на $\omega_m + \varepsilon^2\nu$.

При малых ξ (т.е. в центральной части волнового пакета) справедливы соотношения

$$\operatorname{sech}(p\xi) = 1 - p^2\xi^2, \quad \ln(\operatorname{sech}(p\xi)) = p^2\xi^2,$$

а в уравнении (17), полученном в рамках линейной теории, при малых ξ можно писать

$$\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a\tau}\right) = 1 - \frac{\xi^2}{4a\tau}$$

Таким образом, при малых временах τ, согласно линейной теории, ширина волнового пакета растет пропорционально τ, а при больших временах τ, согласно нелинейной теории, образуется групповой солитон, постоянная ширина которого определяется параметром $1/p$.

До сих пор мы рассматривали только термоконвективные волны, распространяющиеся влево из источника $x = 0$. Чтобы описать волны, двигающиеся от источника вправо, достаточно во всех формулах поменять знаки перед k_m и V. Исследуя волны, двигающиеся навстречу друг другу, вместо уравнения (18) приходим к системе из двух уравнений

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} - a\frac{\partial^2 B_1}{\partial \xi_1^2} - bB_1 + c_1 B_1|B_1|^2 + c_2 B_1|B_2|^2 = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial \tau} - a\frac{\partial^2 B_2}{\partial \xi_2^2} - bB_2 + c_1 B_2|B_2|^2 + c_2 B_2|B_1|^2 = 0, \tag{24}$$

где

$$B_1 = B_1(\tau, \xi_1), \ \ B_2 = B_2(\tau, \xi_2), \ \ \xi_1 = \varepsilon(x - x_0 + Vt), \ \ \xi_2 = \varepsilon(x + x_0 - Vt),$$

$$c_1 = \frac{b}{14\pi^2}, \quad c_2 = c_1\left(1 - \frac{4\pi^2 F(\omega_m)}{(4\pi^2 + 2i\omega_m)\operatorname{Re} F(\omega_m)}\right) = \frac{107 - i120\sqrt{3}}{211}.$$

Уравнения (23) и (24) описывают термоконвективные волны, бегущие влево и вправо из источников $x = x_0$ и $x = -x_0$. Центры волновых пакетов встречаются в момент времени $t = t_0 = x_0/V$ в точке $x = 0$ и волновые пакеты полностью накладываются друг на друга. В диапазоне времени $\Delta t \ll t_0$

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi, \qquad B_1 = B_2 = B,$$

и уравнения (23) и (24) сводятся к виду

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} - a\frac{\partial^2 B}{\partial \xi^2} - bB + (c_1 + c_2)B|B|^2 = 0. \qquad (25)$$

Решение уравнения (25) записывается, как и решение уравнения (19), в виде солитона (20), но коэффициенты, вместо значений (21), принимают значения

$$|C|^2 \approx 8.6\pi^2, \quad \nu \approx 3.6\pi^2, \quad p \approx 0.15\pi^2, \quad q \approx 5.5. \qquad (26)$$

Таким образом, во время взаимодействия солитонов меняется не только их амплитуда $|C|$, но и форма, которая определяется параметром p (чем больше p, тем меньше ширина солитона).

Обсуждение результатов

Поскольку $x_0 \approx 5$ (кратон имеет характерный размер – порядка 2000 км), образование стоячей термоконвективной волны происходит на относительно небольших временах $t_0 = x_0/V \approx 1/2$. Положив в (16) $t \approx t_0 \approx 1/2$, нетрудно заключить, что линейную теорию термоконвективных волн можно использовать для объяснения происхождения осадочных бассейнов, если $\varepsilon \ll 1/6$.

В случае, когда $\varepsilon \geq 1/6$, к моменту образования стоячей волны бегущие навстречу друг другу волновые пакеты уже приобретают форму солитонов и, как следует из (8), (20) и (26), амплитуда вертикальной скорости в стоячей волне оценивается как

$$2\sqrt{8.6}\pi\varepsilon \geq 3.$$

Для объяснения формирования бассейнов нужна амплитуда колебаний вертикального смещения в литосфере порядка $|u_z| \approx 10^{-2}$, как показано в [3]. При этом амплитуда вертикальной скорости оценивается как $|\nu_z| = |u_z|/\omega_m \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, при $\varepsilon \geq 1/6$ амплитуда вертикальной скорости оказывается значительно выше того значения, которое требуется для объяснения происхождения бассейнов.

Оценки, учитывающие сильную реологическую неоднородность литосферы Земли и реальные граничные условия, показывают, что для литосферы число Рэлея Ra чуть ниже, чем минимальное критическое число Рэлея Ra_m [3]. Поскольку точность этих оценок невелика, представляет интерес и ситуация, когда Ra немного выше, чем Ra_m. Оказывается, что для развиваемой автором термоконвективной теории происхождения осадочных бассейнов допустимы только значения Ra, очень слабо (не более, чем на 1%) превосходящие Ra_m. В этом случае линейная теория конвективной устойчивости "хорошо" работает на геологических временах и амплитуда термоконвективных волн в литосфере определяется начальными возмущениями.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-05-64242).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birger B.I.* Rheology of the Earth and thermoconvective mechanism for sedimentary basins formation // Geophys. J. Inter. 1998. Vol.134. P.1–12.
2. *Birger B.I.* Excitation of thermoconvective waves in the continental lithosphere // Geophys. J. Inter. 2000. Vol.140. P.24–36.
3. *Биргер Б.И.* Термоконвективные волны в реологически неоднородной континентальной литосфере (в печати).
4. *Stewartson K., Stuart J.T.* A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow // J. Fluid Mech. 1971. Vol.48. P.529–545.
5. *Hocking L.M., Stewartson K., Stuart J.T.* A non-linear instability burst in plane parallel flow // J. Fluid Mech. 1972. Vol.51. P.705–735.