

УДК 550.345

САМООРГАНИЗАЦИЯ СТРУКТУР В МОДЕЛЯХ НА РЕШЕТКЕ И ПРОГНОЗ ИХ ПОВЕДЕНИЯ

И.В. КУЗНЕЦОВ, И.В. ЛОМОВСКОЙ, И.М. РОТВАЙН

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Рассматривается решетчатый аналог пружинно-блочной модели Барриджа-Кнопова, введенный Олами и Кристенсеном. Показано, что в этой модели существуют самоорганизующиеся структуры ячеек решетки. Структуры устойчивы в течение длительного времени и являются каркасом будущих сильных событий. Число элементов в структуре сравнительно постоянно, хотя их расположение меняется во времени. Структуры позволили создать простой алгоритм для прогноза времени и места сильных событий. Прогноз дает 80% успехов при 3% времени тревоги.

SELF-ORGANIZED STRUCTURE IN THE LATTICE MODELS AND PREDICTION OF ITS BEHAVIOR

I.V. KUZNETSOV, I.V. LOMOVSKOY, I.M. ROTWAIN

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The lattice model introduced by Olami and Christensen is under the investigation. This model is the analogue of Burridge-Knopoff spring-block fault models of in the mass less case. The existence of self-organized structures of the lattice cells is demonstrated. These structures are stable over long period, and per se they are a skeleton of the further large events. The number of structure elements is relatively constant although their positions are changing at the time. The existence of these structures allows to create simple algorithm for prediction time and place of a large events. Above 80% of large events are predicted with an alarm time of about 3%.

Введение

В работах [1–6] изучается класс моделей на решетке, являющихся аналогом пружинно-блочных моделей [7] с блоками без массы. Эти модели, как и модели Бака [8], обладают самоорганизующейся критичностью (SOC) в широком диапазоне параметров; они имеют линейные графики повторяемости с наклоном, близким к единице, и обычно рассматриваются как модели сейсмического процесса.

Данная статья посвящена изучению поведения изотропного варианта модели на решетке с открытыми границами, введенного ранее Олами и Кристенсенсом [1,3,4]. В этой модели в каждую ячейку решетки извне поступает энергия с постоянной и одинаковой для всех ячеек скоростью. В моменты, когда энергия в ячейке превышает некий порог, ячейка рвется, т.е. часть ее энергии переходит соседям, а остаток теряется (диссипирует). Более подробно модель описана в разделе 1.

Если упорядочить ячейки кластера по их энергии перед образованием кластера, то можно заметить постоянную группируемость (стратификацию) ячеек по нескольким энергетическим рангам. Ячейки, сохраняющие свой ранг в течение достаточно длительного периода времени, называются элементами структуры. Попадая на границу кластера, в кратный разрыв или соседствуя с ним, ячейка меняет свой ранг на другой. Тем не менее число ячеек, входящих в структуру, достаточно постоянно во времени, хотя их расположение на решетке меняется. Определение структур приведено в разделе 2.

В разделе 3 приводятся результаты некоторых экспериментов со структурами, показывающие зависимость характерного времени жизни элементов структуры от различных параметров модели. Также приводится статистическое обоснование существования структур. Показано, что сами структуры статистически незначимы лишь при коэффициенте диссипации, близком к нулю.

Для прогноза времени и места появления в модели больших событий используется метод восстановления управляющих параметров [9, 10]. В рассматриваемой модели при заданном коэффициенте диссипации он сводится к оценке текущего состояния ячеек решетки по некоторой части модельного каталога. Структуры, являясь, по сути, медленно меняющимся каркасом будущих кластеров, позволяют создать простой алгоритм, прогнозирующий время и место появления большого кластера; этот алгоритм рассмотрен в разделе 4.

1. Модель

Описание модели. Рассмотрим решетку размера L , состоящую из $L \times L$ ячеек. Пусть $h_i(t)$ – энергия ячейки i в момент t , а $H(t) = \{h_i(t), i = 1, 2, \dots, L \times L\}$ – состояние всей системы. В стандартном режиме каждая ячейка решетки накапливает энергию со скоростью U до тех пор, пока в некоторой ячейке i энергия не достигнет порогового значения, равного единице.

С этого момента начинается *быстрый процесс* (БП) образования кластера:

– для всех ячеек подток энергии извне прекращается;
 – ячейка i рвется, т.е. из состояния h_i переходит в состояние 0, часть ее исходной энергии Dh_i теряется (диссипирует), а остаток $h_i(1 - D)$ перераспределяется поровну на четыре соседние ячейки, если данная ячейка не лежит на краю решетки. Энергия рвущейся краевой ячейки, приходящаяся на долю отсутствующих соседей, при перераспределении также диссипирует. В некоторых ячейках энергия после перераспределения может достичь или превысить порог, равный единице. Тогда из них выбирается та ячейка, энергия которой максимальна. Она рвется по вышеописанному правилу, и перераспределение продолжается до тех пор, пока у всех ячеек решетки энергия не станет меньше единицы. На этом быстрый процесс заканчивается и возобновляется стандартный режим подтока энергии со скоростью U . Заметим, что в текущем БП одна и та же ячейка может рваться многократно.

Назовем D коэффициентом диссипации, а энергию $h_i(1 - D)/4$, переданную соседу, – квантом (K^*). Очевидно, что минимальный квант $K = (1 - D)/4$.

Множество соседних ячеек, порванных в одном быстром процессе, образует *кластер*. Ячейку кластера, у которой все ее четыре соседа входят в этот же кластер, назовем *внутренней*. Остальные ячейки кластера будут считаться *граничными*.

Начальное состояние системы $H(0)$ задается независимыми, равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$ случайными величинами $\{h_i(0)\}$.

Результатом моделирования является каталог кластеров. Для каждого кластера он содержит перечень всех разрывов ячеек в порядке их возникновения. Первая порванная ячейка кластера будет считаться его *эпицентром*.

Графики повторяемости. Под *размером кластера* V_C будем понимать число ячеек решетки, составляющих кластер. Результаты моделирования показывают, что распределение кластеров по их размерам в двойном логарифмическом масштабе линейно. Это свойство является аналогом закона Гутенберга–Рихтера для землетрясений, если ассоциировать $\lg V_C$ с магнитудой M события, и такие распределения называются *графиками повторяемости*. Они приведены на рис. 1 для решетки размера $50 \div 200$ при коэффициенте диссипации $D = 0 \div 0.4$. Видно, что с увеличением D угол наклона графика увеличивается, и при $D > 0.5$ максимальный размер кластера V_C не превышает 200 даже на решетке размера $L = 500$.

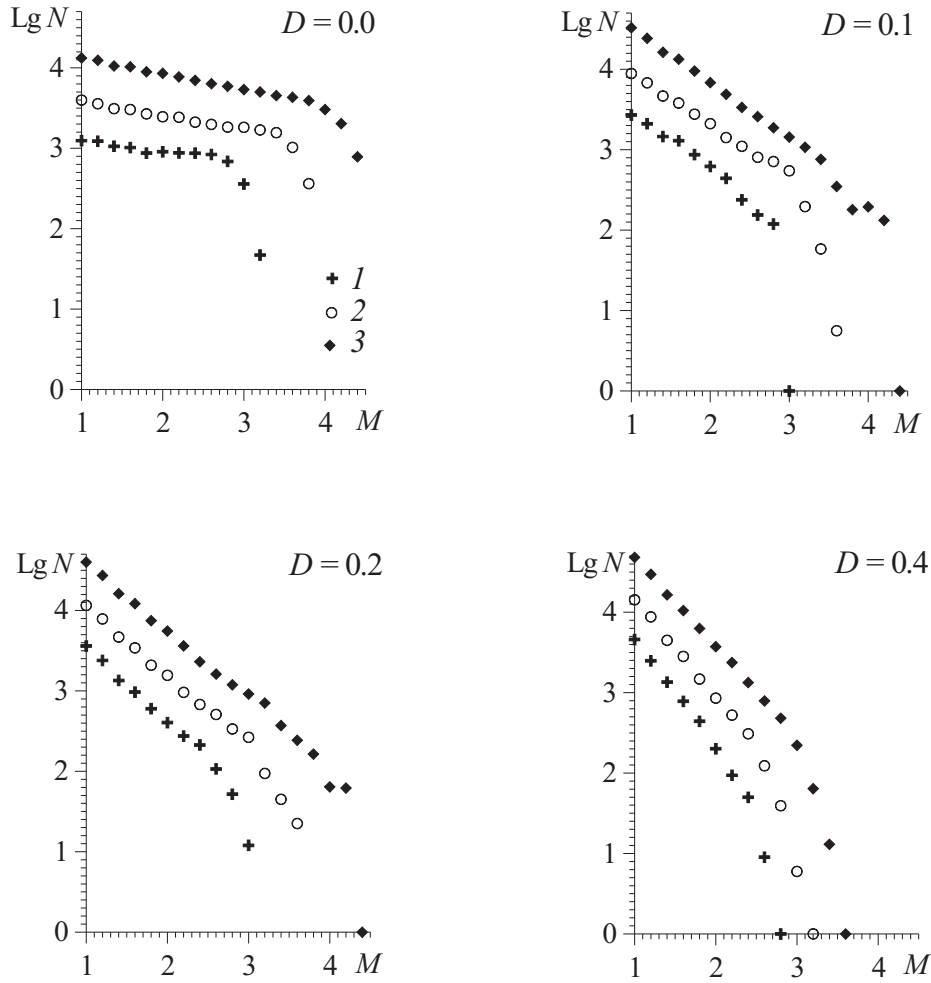


Рис. 1. Графики повторяемости для кластеров с $V_C \geq 10$ при 4-х значениях коэффициента диссипации D :

1 – 10 000 кластеров, $L = 50$; 2 – 40 000 кластеров, $L = 100$; 3 – 160 000 кластеров, $L = 200$

2. Структуры

Энергетические ранги. Назовем состояние ячейки i кластера до начала БП и после него, соответственно, *входной* h_i^+ и *выходной* h_i^- энергией. Для простоты предположим, что при моделировании возник кластер, не содержащий кратных разрывов, и его ячейка i имеет в нем Q соседей. Тогда, если n – число квантов, полученных ячейкой в данном БП до ее разрыва, а l – после разрыва, то $(n + l) = Q$, так как все ее соседи рвутся один раз. При $Q = 1, 2, 3$ ячейка является граничной,

а при $Q = 4$ – внутренней. Очевидно, что если $n = Q$, то выходная энергия ячейки $h_i^- = 0$, а при $l = Q$ ее входная энергия $h_i^+ = 1.0$.

Проведем дискретизацию шкалы h^- по числу квантов l . Будем говорить, что ячейка i имеет *нулевой выходной ранг* ($R_i^- = 0$), когда ее выходная энергия $0 \leq h_i^- < K$; *первый выходной ранг* ($R_i^- = 1$), когда $K \leq h_i^- < 2K$ и т.д. до максимального *четвертого выходного ранга* $R_i^- = 4$, когда $4K \leq h_i^- < 1$.

Ячейка при разрыве отдает соседу квант $K^* \geq K$. Пусть θ определяет среднее значение $(K^* - K)$ по всем разрывам каталога. Тогда, для дискретизации шкалы h^+ присвоим ячейке i : *нулевой входной ранг* ($R_i^+ = 0$), если ее входная энергия $0 \leq h_i^+ < (1 - 3(K + \theta))$; *первый* ($R_i^+ = 1$), если $(1 - 3(K + \theta)) \leq h_i^+ < (1 - 2(K + \theta))$; *второй* ($R_i^+ = 2$), если $(1 - 2(K + \theta)) \leq h_i^+ < (1 - (K + \theta))$; *третий* ($R_i^+ = 3$), если $(1 - (K + \theta)) \leq h_i^+ < 1$ и *четвертый входной ранг* ($R_i^+ = 4$), если $h_i^+ = 1$.

Пример кластера на решетке размера $L = 50$ приведен на рис. 2, где $D = 0.1$ ($K = 0.225$), а оценка $\theta = 0.025$. Кластер состоит из 143 внутренних и 74 граничных ячеек.

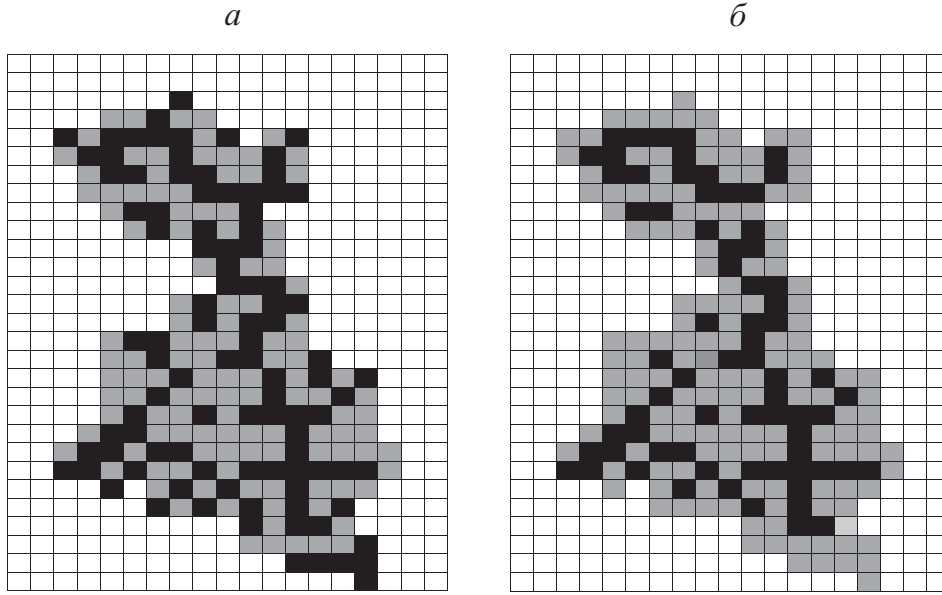


Рис. 2. Пример кластера в модели на решетке размера $L = 50$ при коэффициенте диссипации $D = 0.1$.

Ячейки кластера закрашены, среди них черным цветом выделены ячейки ранга $R^+ \geq 3$ с входной энергией $h_i^+ \geq 0.75$ (а) и ранга $R^- \geq 3$ с выходной энергией $h_i^- \geq 0.675$ (б)

Маргинальные (рис.3, *a*) и совместные (рис.3, *б*) гистограммы входной h^+ и выходной h^- энергии внутренних ячеек этого кластера обнаруживают явную дискретность, совпадающую с введенным выше ранжированием. Из рис.3, *б* также видно совпадение входных и выходных рангов у всех внутренних ячеек кластера.

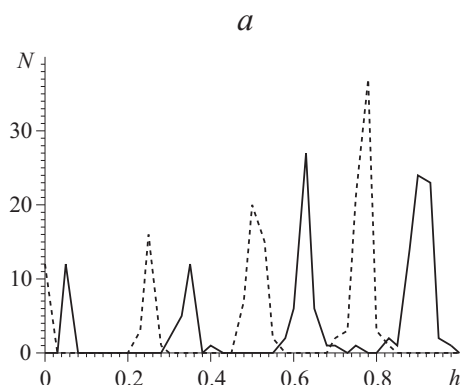
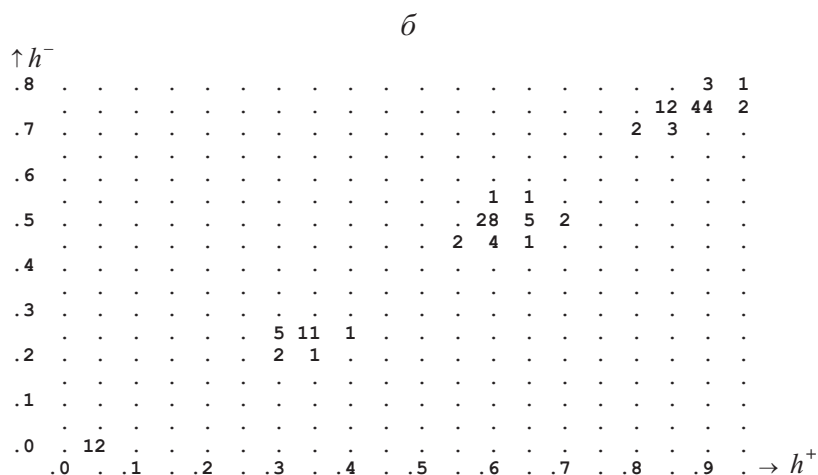


Рис.3. Гистограммы входной h^+ и выходной h^- энергии для внутренних ячеек кластера, представленного на рис.2:

a – распределение числа ячеек по входной энергии h^+ (сплошная линия) и по выходной энергии h^- (штриховая), *б* – совместная гистограмма (h^+, h^-)



Возьмем в этой же модели серию из 100 последовательных кластеров размера $V_C \geq 100$ и усредним совместные распределения (h^+, h^-) раздельно для внутренних (рис.4, *a, б*) и граничных (рис.4, *в, г*) ячеек кластеров. Кластеры, составляющие серию, брались после момента $T_0 = 100$, когда система заведомо установилась. Как и ранее, видна большая стратификация распределения, причем внутренние ячейки кластеров, сохранившие свой нулевой ранг и попавшие в область распределения $R^+ = R^- = 0$, суммарно составляют 6.91% от всех внутренних ячеек. Внутренние ячейки, попавшие в область $R^+ = R^- = 1$, состав-

вляют 16.23%, в область $R^+ = R^- = 2$ – 32.74% и в область $R^+ = R^- = 3$ – 39.52%. На рис. 4, б, г эти распределения приведены в виде изолиний, а горизонтальными и вертикальными линиями отмечены энергетические пороги рангов. Еще раз заметим, что все разрывы, попавшие в неотмеченные области, должны иметь хотя бы одну соседнюю ячейку с кратным разрывом.

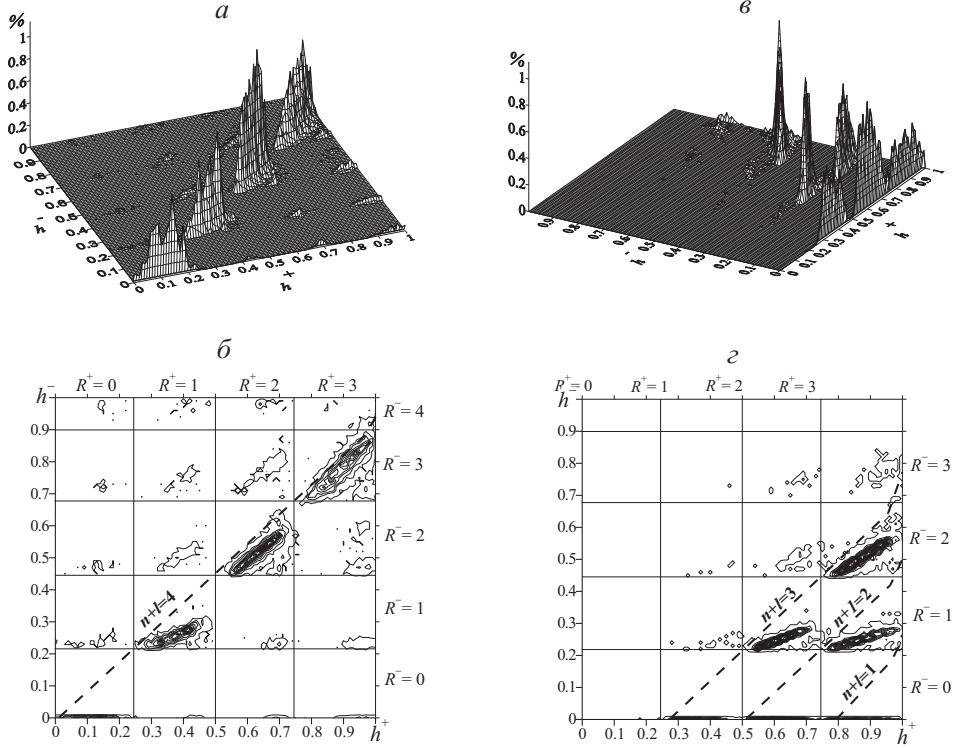


Рис. 4. Распределение (h^+, h^-) для внутренних (а), (б) и граничных (в), (г) ячеек серии из 100 последовательных кластеров с $V_C \geq 100$; модель на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$.

Штриховые линии пересекают области матрицы, куда попадают разрывы ячеек, удовлетворяющие правилу $(n + l) = Q$

Хотя кажется, что при таких распределениях система должна вести себя квазипериодично, но этого не происходит [11], так как на границах кластера (рис. 4, б) и при кратных разрывах ранг соответствующих ячеек может меняться.

Элементы структуры. Пусть за время ΔT данная ячейка входила в N_{cl} кластеров, при этом имела входной ранг R в n_R случаях. Назовем эту ячейку *элементом входной структуры* уровня R , если $(n_R/N_{cl}) \geq W$, где W – некий порог (ниже всюду $W = 0.8$). Аналогично

определяются элементы выходной структуры. Множество элементов входной структуры уровня R будем обозначать как S_R^+ , выходной – как S_R^- , а их плотности относительно ячеек всей решетки как $\varphi_R^+ = S_R^+/L^2$ и $\varphi_R^- = S_R^-/L^2$, соответственно.

Для серии из 100 последовательных кластеров на рис.5 приведено местоположение элементов входной структуры S_3^+ с $N_{cl} \geq \underline{N} = 10$. Параметр отсечения $\underline{N}$ вводится, чтобы не учитывать случаи редкого попадания ячейки в кластеры. В данном примере плотность 477 элементов входной структуры S_3^+ составляет 19.5% от площади всей решетки ($\varphi_3^+ = 19.5\%$) и 31.54% от числа ячеек решетки с $N_{cl} \geq 10$.

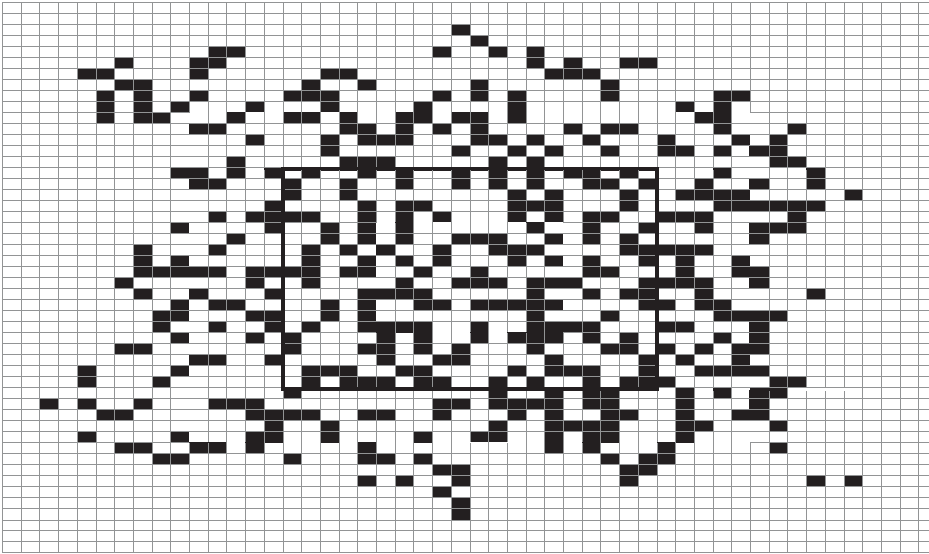


Рис. 5. Местоположение элементов входной структуры S_3^+ (выделено черным цветом) в матрице для всех ячеек серии из 100 последовательных кластеров с $V_C \geq 100$; модель на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$ и $N_{cl} \geq 10$. Жирной линией выделен внутренний квадрат решетки с координатами (16-35, 16-35)

Рассмотрим последовательность из N непересекающихся серий одного размера с момента T_0 . Для каждой из этих серий в моменты образования ее последнего кластера $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_N$ вычислим плотности элементов входной структуры третьего уровня $\varphi_3^+(T_1 - T_0)$, $\varphi_3^+(T_2 - T_1), \dots, \varphi_3^+(T_N - T_{N-1})$. Из графика φ_3^+ для модели на решетке размера $L = 50$, приведенного на рис.6 (кривая 1), видно, что плотность сравнительно постоянна. Плотность для *накапливающихся серий* кластеров в интервалах $(T_0, T_1), (T_0, T_2), \dots$ приведена на рис.6 (кривая 2). С увеличением размера накапливающейся серии плотность φ_3^+ убывает

до некоторой константы. Для модели на решетке с $L=100, 200$ и 300 поведение плотности аналогично, с той лишь разницей, что с увеличением размера решетки время выхода φ_3^+ на константу увеличивается.

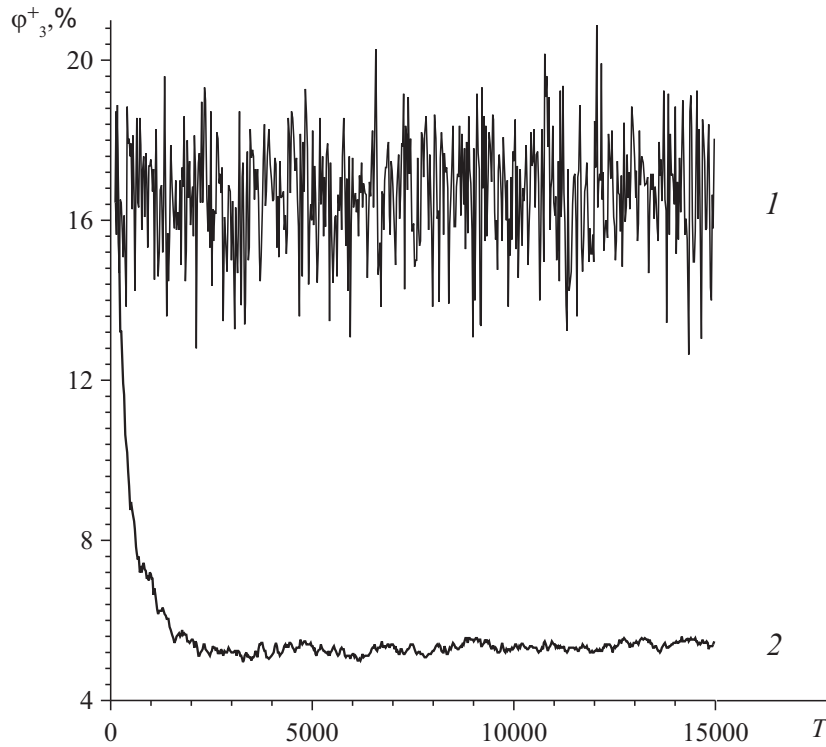


Рис. 6. Динамика плотности φ_3^+ элементов входной структуры третьего уровня S_3^+ с $V_C \geq 100$; модель на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$ и $N_{cl} \geq 10$:

1 — плотность в каждой из серий по 100 последовательных кластеров за период $\Delta T = [100, 15000]$; 2 — плотность в накапливающихся сериях по 100, 200, 300, ... последовательных кластеров

Там, где плотность φ_3^+ максимальна (см. рис. 6, кривая 2), структурные элементы состоят, в основном, из центральных ячеек решетки. С увеличением размера накапливающейся серии кластеров центральные ячейки среди элементов S_3^+ начинают пропадать, когда длительность серии превышает характерное время жизни этих ячеек как элементов структуры. При этом появляются и живут краевые ячейки решетки, рвущиеся существенно реже за счет дополнительной диссипации на границе решетки.

3. Эксперименты со структурами

Зависимость структур от различных параметров. Как отмечалось выше, на границах кластера энергетический ранг ячеек может меняться, размывая данную структуру. Увеличение размера решетки L приводит к увеличению числа больших кластеров, и, следовательно, к увеличению плотности φ_3^+ элементов входной структуры третьего уровня (см. рис. 6). Увеличение размера V_C выбираемых кластеров при заданном коэффициенте диссипации D приводит к уменьшению φ_3^+ , поскольку временной интервал между событиями начинает превышать характерное время жизни элементов структуры; увеличение параметра отсечения $\underline{N}$ уменьшает выборку, увеличивая минимальное время для выявления элементов структуры, и также приводит к уменьшению φ_3^+ (табл. 1).

ТАБЛИЦА 1. Зависимость плотности элементов φ_3^+ (в %) от параметров V_C и $\underline{N}$ при $L = 50$, $D = 0.1$

Параметр отсечения $\underline{N}$	Минимальный размер выбираемых кластеров				
	$V_C \geq 10$	$V_C \geq 50$	$V_C \geq 100$	$V_C \geq 200$	$V_C \geq 400$
5	31	27	24	19	16
10	27	22	20	16	13
20	21	17	15	13	10

Статистические тесты. На рис. 7 приведена плотность ячеек различной входной энергии перед образованием каждого из тех же 100 кластеров, для которых строились распределения (h^+, h^-) на рис. 4. Здесь очевидно преобладание ячеек с высокой энергией как в кластерах, так и во всей системе.

Зная частоту возникновения в модели ячеек третьего энергетического уровня и предполагая независимость их появления, можно подсчитать ожидаемую плотность элементов структуры третьего ранга S_3^+ . Сравнив ее с φ_3^+ , убедимся, что она существенно превышает ожидаемую.

Плотность элементов структуры S_3^+ на краях решетки мала (см. рис. 5), поэтому на решетке с $L = 50$ выделим внутренний квадрат с координатами $(16 - 35, 16 - 35)$. Из серии 100 последовательных кластеров размера $V_C \geq 100$ в этот квадрат попадает 7155 ячеек с $N_{cl} \geq 10$, из которых лишь 3326 (46.5%) имеют входную энергию, удовлетворяющую условию $R^+ = 3$, т.е. $0.75 \leq h < 1$.

Пусть, например, некая ячейка выделенного квадрата входила в 16 кластеров. Тогда, по определению, она будет считаться элементом структуры S_3^+ , если ее входная энергия удовлетворяла условию

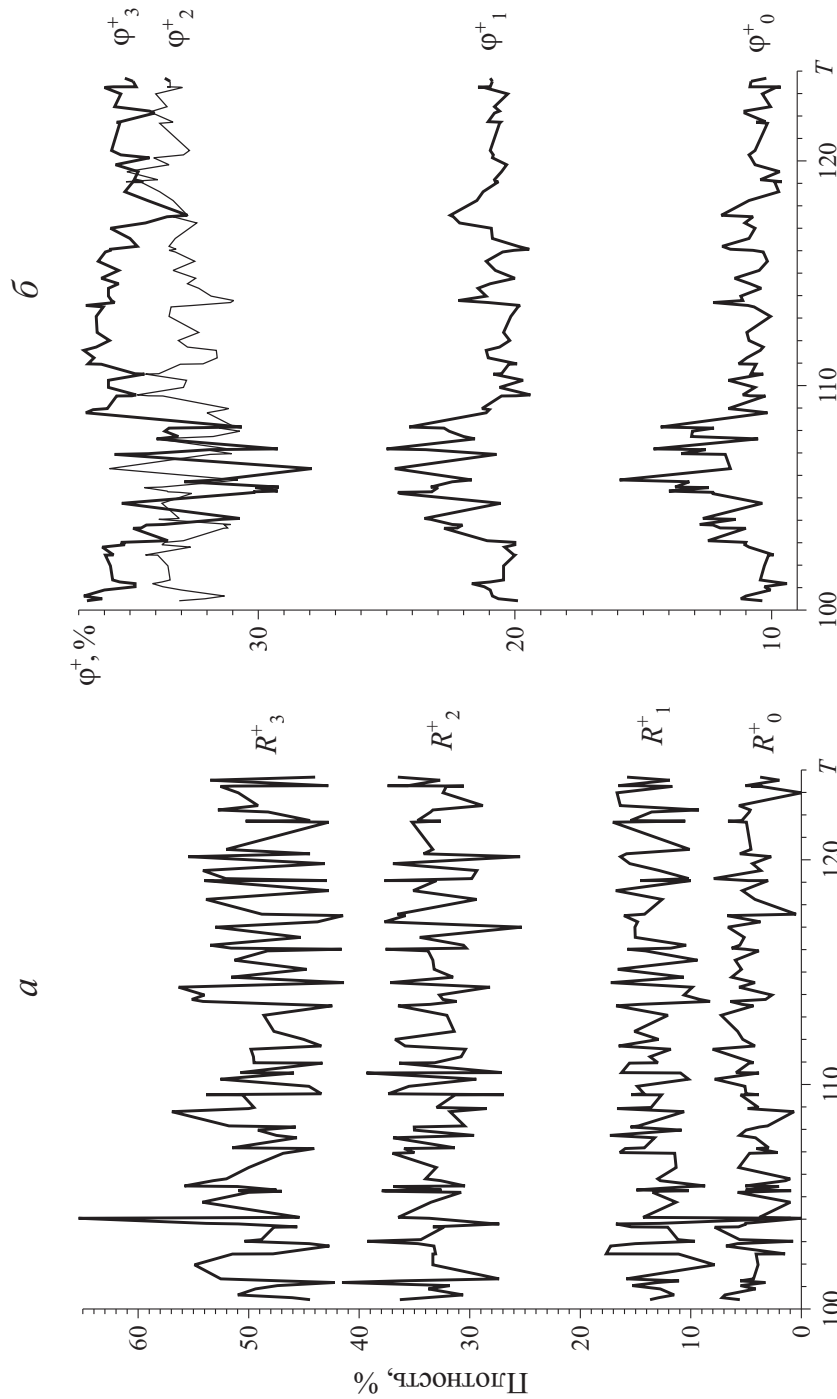


Рис. 7. Динамика плотности ячеек различной входной энергии перед образованием каждого из 100 последовательных кластеров с $V_C \geq 100$; модель на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$ и $N_d \geq 10$:
 а – плотность ячеек 4-х входных рангов по отношению к размеру V_C их кластеров, b – плотности φ^+ элементов входной структуры 4-х уровней по отношению к площади решетки

$0.75 \leq h < 1$ не менее чем в 13 из 16 кластеров, так как $W = 0.8$. По формуле Бернулли вероятность не менее 13 из 16 попаданий при $p = 0.465$ (3326/7155) и $q = (1 - p)$ есть

$$P = P_{16}(13) + P_{16}(14) + P_{16}(15) + P_{16}(16) = 0.0049.$$

Проделав аналогичные выкладки при данном p и q для всех ячеек квадрата при $N_{cl} \geq 10$, получим среднее $\langle P \rangle = 0.0055 \pm 0.0026$, хотя реальная плотность элементов структуры S_3^+ составляет 0.4075 от площади квадрата.

Для последовательности из 100 непересекающихся серий по 100 кластеров средняя вероятность в данном квадрате составит $\langle P \rangle = 0.0039 \pm 0.0029$, в то время как реальная плотность элементов структуры S_3^+ , в среднем, составляет 0.3406 ± 0.0276 от площади квадрата.

Для этой же последовательности по всей решетке $\langle P \rangle = 0.0113 \pm 0.0925$, тогда как реальная средняя плотность $\langle \varphi_3^+ \rangle$ составляет 0.1666 ± 0.0139 от площади всей решетки. Увеличение $\langle P \rangle$ объясняется практическим отсутствием элементов структуры на краях решетки (см. рис. 5).

Наконец, такие же последовательности для 10 разных исходных состояний системы дают по всей решетке $\langle P \rangle = 0.0113 \pm 0.0925$ при средней плотности $\langle \varphi_3^+ \rangle = 0.1666 \pm 0.0139$.

Зависимость плотности элементов структуры от коэффициента диссипации. При данном коэффициенте диссипации D возьмем накапливающиеся серии, состоящие из 1, 2, 3, ... кластеров размера $V_C \geq 100$. Найдем среди них серию с максимумом плотности φ_3^+ элементов входной структуры третьего уровня S_3^+ относительно ячеек всей решетки. Пусть L_m — длина этой серии. Теперь, аналогично предыдущему, вычислим $\langle P \rangle$ для последовательности из 10 непересекающихся серий длины L_m . Проделав эти операции при разных значениях D , получим график зависимости $\langle P \rangle$ от D и сопоставим его с соответствующим графиком средней плотности элементов $\langle \varphi_3^+ \rangle$ (рис. 8). Видно, что при уменьшении коэффициента диссипации D от его значения 0.1 эта плотность падает, и при $D < 0.005$, когда число кратных разрывов превосходит 50% (рис. 9), появление структуры может быть случайным. Понятно, что ячейка кластера, попав в кратный разрыв или соседствуя с ним, может менять свой ранг на другой, что видно из рис. 10, где представлено распределение ячеек по входной и выходной энергии для случая $D = 0$. При таком D число кратных разрывов максимально (более 60% от числа всех разрывов), так как диссипация энергии в системе происходит лишь за счет краев решетки.

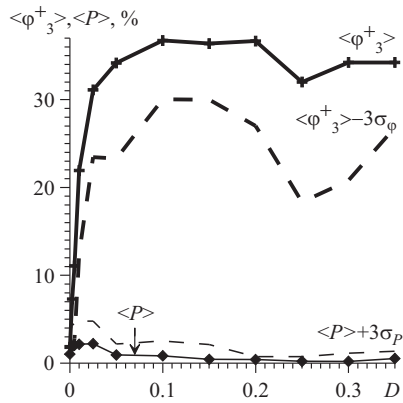


Рис. 8. Зависимость средней плотности $\langle \varphi_3^+ \rangle$ и средней вероятности $\langle P \rangle$ (сплошные линии) элементов структуры S^+ в процентах к площади всей решетки от коэффициента диссипации D ; модель на решетке с $L = 50$ при $V_C \geq 100$, $N_{cl} \geq 10$. Штриховые линии соответствуют: $(\langle \varphi_3^+ \rangle - 3\sigma_\varphi)$ (где σ_φ – стандартное отклонение φ_3^+) и $\langle P \rangle + 3\sigma_P$ (где σ_P – стандартное отклонение P)

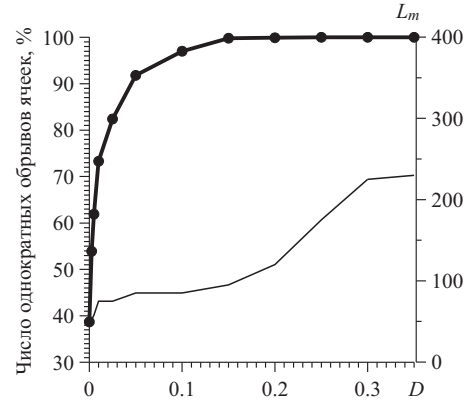


Рис. 9. Зависимость числа однократных обрывов ячеек в процентах ко всем обрывам (жирная линия) и размера серии L_m (тонкая линия), при котором велись соответствующие подсчеты графиков рис. 8 от коэффициента диссипации D

Некоторое уменьшение плотности элементов $\langle \varphi_3^+ \rangle$ при $D > 0.2$ может объясняться уменьшением угла наклона графика повторяемости, т.е. увеличением времени между кластерами с числом ячеек $V_C \geq 100$ ($M \geq 2$). Хотя подробное изучение времени жизни элементов структуры не является целью данной работы, ряд экспериментов показывает, что на характерное время жизни ячейки в структуре, помимо параметров $\underline{N}$ и V_C , влияет ее местоположение на решетке и коэффициент D .

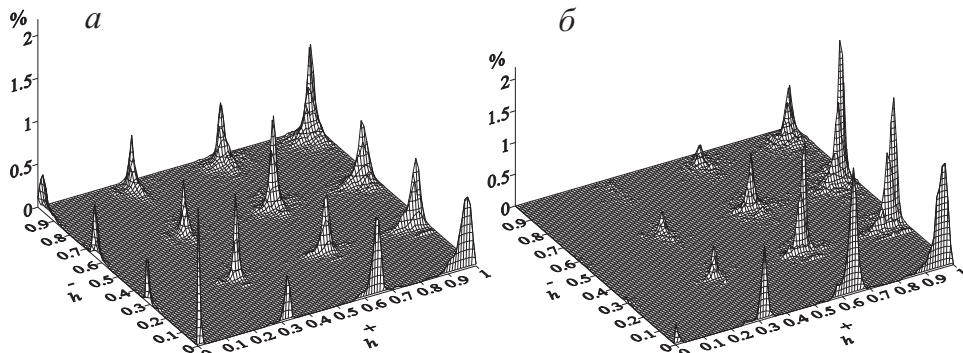


Рис. 10. Распределение (h^+, h^-) для внутренних (а) и граничных (б) ячеек в серии из 100 последовательных кластеров с $V_C \geq 100$; модель на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.0$

Вышеприведенные статистики были приведены, в основном, для элементов входной структуры третьего уровня (S_3^+). Поведение элементов входной структуры второго уровня (S_2^+) аналогично, в то время как плотность элементов структуры первого и нулевого уровней незначительна, как и общее количество ячеек соответствующих энергетических рангов.

Таким образом, элементы S_3^+ и S_2^+ являются каркасом кластеров, и наблюдение за их энергетическим уровнем может помочь прогнозу появления больших кластеров на решетке.

4. Прогноз

Исходные данные. Пусть известны размер решетки, скорость U подтока энергии извне в ячейки и коэффициент диссипации D . Кроме того, в качестве материала обучения дана часть модельного каталога кластеров за время $[T_0, T_1]$. Потребуем, чтобы за это время все ячейки решетки порвались хотя бы по одному разу. Для $[T_0, T_1]$ строятся распределения (h^+, h^-) для внутренних и граничных ячеек кластеров, представленные в редуцированном виде, где отброшены все элементы со значениями, меньшими 0.1.

По этим данным оцениваются возможные состояния системы $H(T_1)$ в момент T_1 . Из них выбирается некое состояние $H^*(T_1)$ как исходное для прогноза. Сам прогноз состоит в моделировании системы из этого состояния с момента T_1 до момента появления в ней кластера, и в сопоставлении этого прогнозного кластера с кластером модельного каталога, возникшим в момент T^m . Вне зависимости от того, предсказал ли прогнозный кластер размер и место будущего кластера в модельном каталоге, последний добавляется к материалу обучения. Снова оценивается состояние системы на выходе из БП в момент T^m и опять проводится моделирование.

Оценка состояния системы. Начальный шаг. Процесс оценки начинается с первого в $[T_0, T_1]$ кластера, возникшего в некий момент t_1 . Так как модельный каталог содержит перечень всех разрывов ячеек каждого из его кластеров, то для любой ячейки i кластера можно определить число соседей n_i в кластере, давших ей квант энергии в БП момента t_1 до ее первого разрыва в нем, а также число соседей l_i , давших ей квант энергии после ее последнего разрыва. В распределениях (h^+, h^-) пара (n_i, l_i) однозначно определяет область, соответствующую данному обрыву ячейки i кластера. В этой области выбирается минимально возможное значение выходной энергии h^- и приписывается ячейке i как ее минимальное значение $\min h_i^-(t_1)$ в данном БП.

Максимальное значение выходной энергии ячейки $\max h_i^-(t_1)$ берется как максимально возможное значение h^- в той же области. Интервал $(\min h_i^-(t_1), \max h_i^-(t_1))$ назовем *интервальной оценкой* выходной энергии ячейки i в момент t_1 . Аналогичным образом определяется интервальная оценка выходной энергии остальных ячеек кластера (рис. 11, I).

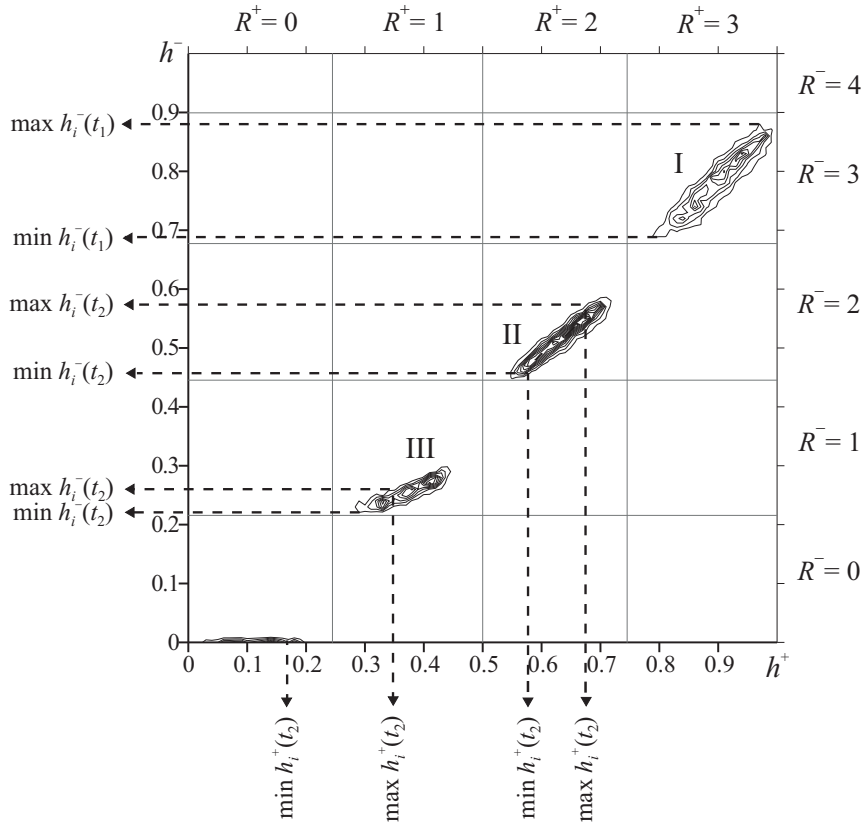


Рис. 11. Схема вычисления интервальной оценки выходной энергии h_i^- ячейки i по редуцированному распределению (h^+, h^-) из рис. 4, б:

I – оценка h_i^- для первого кластера в обучении; II, III – оценка h_i^- по интервалу оценки входной энергии, попадающего в одну область (II) и в две области (III)

Оценка состояния системы. Последующие шаги. Если ячейка i от выхода из БП момента t_1 до некоторого момента $t > t_1$ не имела обрывов среди своих соседей, то

$$\min h_i(t) = \min h_i(t_1) + U(t - t_1) \quad \text{и} \quad \max h_i(t) = \max h_i(t_1) + U(t - t_1).$$

Если ячейка i рвется следующий раз в момент t_2 и для нее известна интервальная оценка входной энергии $(\min h_i^+(t), \max h_i^+(t))$ в

этом БП, то по новой паре (n_i, l_i) определяется область в распределении (h^+, h^-) , а по нему делается интервальная оценка выходной энергии ячейки $(\min h_i^-(t), \max h_i^-(t))$ (рис. 11, II, III).

Пусть в момент t между выходом ячейки i из БП до входа в ее следующий БП соседняя с ней ячейка j оборвалась и дала квант энергии K_j^* своим соседям, в том числе и ячейке i . Чтобы его установить, попробуем по интервальной оценке выходной энергии $(\min h_j^-(t), \max h_j^-(t))$ оценить энергию ячейки j перед последним разрывом.

Заметим, что разница ΔK между квантом, отданным любой граничной ячейкой кластера соседям при ее обрыве, и средним квантом, полученным затем этой же ячейкой от ее соседей в том же БП, достаточно мала (рис. 12).

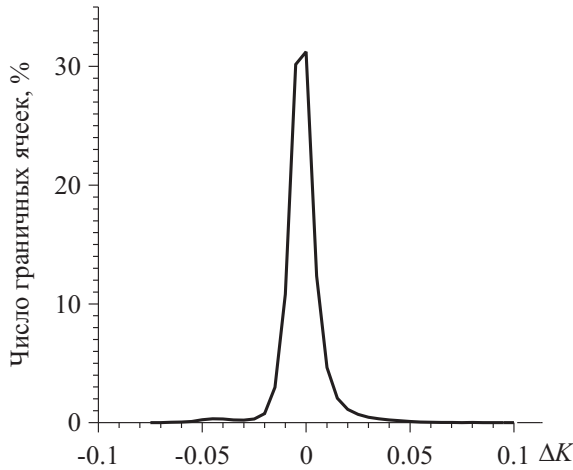


Рис. 12. Распределение числа граничных ячеек (в %) по ΔK — разнице между отданным и средним полученным квантом для 1000 кластеров с $V_c \geq 100$; модель на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$

Поэтому, если число соседей l_j ячейки j , давших ей квант после ее последнего разрыва в БП момента t , не равно нулю, то можно оценить K_j^* , как $(\min h_j^-(t)/l_j, \max h_j^-(t)/l_j)$, а интервальная оценка энергии ячейки i после получения кванта от j определяется, как

$$(\min h_i(t) + \min h_j^-(t)/l_j, \max h_i(t) + \max h_j^-(t)/l_j).$$

В случае $l_j = 0$ вместо ячейки j для оценки ее кванта берется соседний с j граничный элемент ее кластера, если только этот кластер не состоит из одной ячейки, когда $K_j^* = K$.

Таким образом, двигаясь от кластера к кластеру, возникающих за время $[T_0, T_1]$, приходим к интервальной оценке состояния системы в момент T_1 . Далее, взяв для каждой ячейки среднее между ее $\min h(T_1)$ и $\max h(T_1)$, получим некое состояние системы $H^*(T_1)$, которое и будет использоваться в качестве начального при прогнозе.

Прогноз. Назовем кластер *большим*, если число ячеек в нем $V_C \geq N_0$. Два кластера считаются *сравнимыми*, если число общих для них ячеек не менее, чем вдвое превышает сумму их несовпадающих элементов.

Начиная с $H^*(T_1)$, промоделируем систему до момента T' появления в ней первого кластера. Пусть его эпицентром будет ячейка i , а состояние системы перед БП в момент T' станет

$$H(T') = \{h_1^*(T'), h_2^*(T'), \dots, h_{L \times L}^*(T')\}.$$

Отберем в этот момент все ячейки решетки, чей энергетический уровень превышает некую величину $\underline{h}$ (далее использовалось $\underline{h} = 0.95$) и устроим процедуру *поджигания* кластеров. Возьмем среди отобранных какую-нибудь ячейку j и заменим ее состояние h_j^* на 1.0, а состояние эпицентра h_i^* на h_j^* . Промоделируем этот БП, начиная с ячейки j , при новом состоянии системы, и получим кластер с эпицентром в ячейке j . Теперь вернемся к начальному состоянию $H(T')$ перед данным БП и продelaем ту же операцию для другой отобранной ячейки и т.д. по всем отобранным ячейкам. Из получаемых таким образом кластеров возьмем максимальный по количеству содержащихся в нем ячеек и назовем его *прогноznым*.

Процедура поджигания понадобилась из-за неточной оценки состояния системы, при которой энергия эпицентральной ячейки кластера может оказаться заниженной. Эта процедура делает алгоритм более робастным.

Эксперименты по поджиганию кластеров, использующие информацию о реальном состоянии всех ячеек решетки перед возникновением больших кластеров, показали, что ячеек, которые в состоянии поджечь кластер, сравнимый с данным, достаточно мало. Так для 100 кластеров с $V_C \geq 800$ при $D = 0.1$ среднее число таких ячеек, по отношению ко всем ячейкам решетки (в процентах), составляет 3.06 ± 2.93 . Эти ячейки расположены недалеко от реального эпицентра со средним расстоянием до него 8.19 ± 4.29 .

Объявление тревоги. Если прогноznый кластер является большим, то тревога объявляется на T_a единиц времени с момента возникновения этого кластера. Если тревога уже объявлена, то она продлевается с момента возникновения этого кластера на T_a единиц.

В любом случае далее берется очередной после T_1 кластер из модельного каталога, возникший в момент T^m . Если этот кластер большой, попадает в тревогу и сравним с прогноznым, то он считается успешно спрогноznированным и тревога снимается. Если в исходном каталоге найден большой кластер, но, либо не было тревоги, либо прогноznый и

найденный кластеры не сравнимы, то последний считается пропущенным.

Дообучение. Кластер из каталога добавляется к материалу обучения, момент T_1 заменяется на T^m и оценивается состояние системы после БП в момент T^m . Снова проводится процедура прогноза, и так далее.

В табл.2 приведены результаты прогноза для модели на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$ и $D = 0.2$ в виде (n°, τ°) -метрик [12], где n° – отношение числа пропущенных при прогнозе кластеров к общему числу прогнозируемых кластеров, а τ° – отношение суммарного времени тревоги ко всему времени прогноза.

ТАБЛИЦА 2. Результаты прогноза для модели на решетке размера $L = 50$

D	N_0	Число кластеров с $V_C \geq N_0$	$n^\circ(\%)$	$\tau^\circ(\%)$
0.1	550	201	25.87	11.19
0.1	800	47	19.15	2.84
0.2	300	184	10.33	15.96
0.2	800	62	6.45	6.17

Фрагмент распределения сильных событий исходного каталога и тревог приведен на рис.13. Здесь моменты возникновения кластеров с $V_C \geq 800$ обозначены тонкими линиями, высота которых соответствует размеру возникшего кластера. Тревоги обозначены серыми

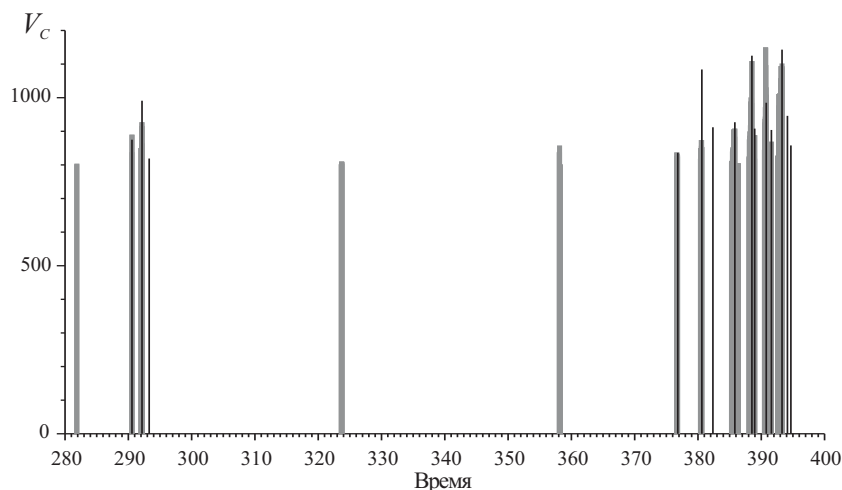


Рис. 13. Фрагмент прогноза кластеров с $V_C \geq 800$ в модели на решетке размера $L = 50$ при $D = 0.1$.

Черные линии – кластеры каталога, серые прямоугольники – тревоги

прямоугольниками, высота которых соответствует размеру прогнозируемого кластера. В этих экспериментах по прогнозу для оценки состояния системы использовался временной отрезок $[T_0, T_1]$ такой длины, что все ячейки системы рвались в период обучения хотя бы дважды. Как показывают эксперименты, метод оценки настолько груб, что увеличение этого отрезка практически не сказывается на качестве прогноза.

Приведенный выше алгоритм позволяет при $D = 0.1$ прогнозировать около 80% сильных событий с $V_C \geq 800$ в 3% времени тревоги. При $D = 0.2$ прогнозируется около 93% сильных событий в 6% времени тревоги.

С уменьшением коэффициента диссипации D качество прогноза ухудшается из-за возрастающего количество кратных разрывов ячеек в больших кластерах. Если из алгоритма убрать процедуру поджигания ячеек с заданным уровнем энергии, то результаты прогноза так же ухудшаются, что, как правило, связано с ошибками двух типов: либо большой кластер, который должен произойти на самом деле, распадается на несколько меньших прогнозных кластеров, либо этот большой кластер возникает в каталоге раньше прогнозного времени.

Заключение

Основные результаты. Рассмотрена двумерная изотропная модель на решетке с открытыми границами. Она является аналогом пружинно-блочных моделей Барриджа–Кнопова для блоков без массы. Показано, что перед образованием кластеров энергия ячеек стратифицируется по нескольким энергетическим рангам, т.е. существуют преимущественные дискретные значения энергии. Однако это не влияет на степенной характер распределения размера кластеров в широком диапазоне параметров модели.

При коэффициенте диссипации $D > 0.0025$ все время существует от 10% до 70% ячеек, образующих структуры и сохраняющих свой энергетический ранг в течение достаточно длительного периода времени. При этом система не ведет себя квазипериодично, так как ячейки, попадая на границу кластера, в кратный разрыв или соседствуя с ним, меняют свой ранг на другой.

Элементы структуры являются каркасом будущих кластеров, который меняется также достаточно медленно. Эксперименты с большими кластерами демонстрируют, что существует лишь порядка 3% ячеек решетки, которые в состоянии поджечь кластер, по размерам сравнимый с данным.

Показано, что для восстановления состояния системы можно избежать сложного перебора взаимозависимых состояний соседних ячеек. Достаточно использовать стратификацию энергии ячеек до и после образования кластеров. Такой подход позволяет при $D = 0.1$ прогнозировать около 80% больших кластеров с $V_C \geq 800$ в 3% времени тревоги. При $D = 0.2$ прогнозируется около 93% таких кластеров в 6% времени тревоги. Это подтверждает принципиальную роль стратификации ячеек по энергии в эволюции системы.

Дальнейшие исследования. Прогнозируемость в модели для сопоставимости с реальной сейсмичностью необходимо изучать, используя каталоги без мелких событий и перечня всех разрывов. Существует методика определения коэффициента диссипации системы по графику повторяемости таких каталогов [13], но оценка состояния системы при этом пока вызывает трудности.

Если на решетке перейти от единичных ячеек к их группам размера (3×3) , то можно убедиться, что для них также существуют структуры. На этом или более высоком иерархическом уровне можно попытаться сформулировать обобщенные правила обмена энергией, аналогичные правилам образования разрывов и кластеров для единичных ячеек, что дает надежду на эффективное использование неполных каталогов для оценки состояния системы.

Кроме того, возникает вопрос о существовании в реальной сейсмичности аналогов модельных структур, локализирующих и предваряющих сильные события.

Авторы выражают глубокую признательность М.Г. Шнирману за многочисленные ценные обсуждения и советы в процессе этой работы.

Данные исследования выполнялись при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект “Поддержка научных школ” 00-15-98507 и проект 02-05-64140 РФФИ), Международного научно-технического центра (проект 1293-99 МНТЦ), ICTP SAND Group, Национального научного фонда США (проект EAR - 9804859) и НАТО (проект SfP 972266).

ЛИТЕРАТУРА

1. Olami Z., Feder H.J.S., Christensen K. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automation modeling earthquakes // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68. P.1244–1247.
2. Christensen K., Olami Z., Bak P. Deterministic 1/f noise in nonconservative models of self-organized criticality // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68. P.2417–2420.
3. Christensen K., Olami Z. Variation of the Gutenberg-Richter b values and nontrivial

- temporal correlation in a spring-block model for earthquakes // J. Geophys. Res. 1992. Vol.97. P.8729–8735.
4. *Olami Z., Christensen K.* Temporal correlations, universality, and multyfractality in a spring-block model of earthquakes // Phys. Rev. A. 1992. Vol.46, N 4. P.R1720–R1723.
 5. *Gabrielov A., Newman W.I., Knopoff L.* Lattice models of failure: Sensitivity to the local dynamics // Phys. Rev. E. 1994. Vol.50, N 1. P.188–197.
 6. *Gabrielov A.* Abelian avalanches and Tutte polynomials // Physica A. 1993. Vol.195. P.253–274.
 7. *Burridge R., Knopoff L.* Model and theoretical seismicity // Bull. Seismol. Soc. Amer. 1967. Vol.57. P.341–371.
 8. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: An explanation of 1/f noise // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol.59. P.381–384.
 9. *Кузнецов И.В.* Прогноз сильных событий в моделях клеточных автоматов на основе решения обратной задачи // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.212–220. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
 10. *Кузнецов И.В., Ротвайн И.М., Колесникова Н.М., Ломовской И.В.* Восстановление управляющих параметров и прогноз поведения клеточных моделей разлома // Проблемы теоретической сейсмологии и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2002. С.245–266. (Вычисл. сейсмология; Вып.33).
 11. *Колесникова Н.М., Ротвайн И.М., Кузнецов И.В.* Динамика поведения некоторых моделей клеточных автоматов // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2001. С.212–224. (Вычисл. сейсмология; Вып.32).
 12. *Molchan G.M.* Earthquake prediction as a decision-making problem // PAGEOPH. 1997. Vol.149. P.233–247.
 13. *Kuznetsov I., Rotwain I.* Behavior of the lattice models. Interim Report // ICTP SAND Group. Trieste, Miramare, May 2003.