

УДК 550.345

**О ТОТАЛЬНОСТИ КРУПНЕЙШИХ СОБЫТИЙ
В МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПЕСКА**А.Б. ШАПОВАЛ^{1,2}, М.Г. ШНИРМАН¹¹Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва²Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации, Москва

Рассмотрена модель накопления песка двумерной решеткой с открытой границей. Графики повторяемости, построенные для решеток различных размеров, совпадают на большей части области определения, если ось размеров нормирована площадью решетки L^2 . Крупнейшие лавины не удовлетворяют сформулированному закону. Их доля не зависит от L , а размер неограниченно возрастает в нормированных единицах с увеличением L . Скорость роста оценена с помощью компьютерного эксперимента. Средняя плотность песчинок определена корректно, несмотря на существование растущих по L лавин. Она сходится по мере к некоторой константе при $L \rightarrow \infty$ как степенная функция.

**ON TOTALITY OF THE STRONGEST EVENTS
IN THE SAND-PILE**A.B. SHAPOVAL^{1,2}, M.G. SHNIRMAN¹¹International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow²Finance Academy under the Government of Russian Federation, Moscow

Bak et al's sand-pile is considered. A two-dimensional square lattice with open boundary accumulates particles. Constructed for the lattices of different areas, size-frequency relation graphs coincide on the significant part of the domain of definition if size axis is normalized by the lattice area L^2 . The strongest avalanches do not satisfy the law in question. Their fraction does not depend on L while their size in the normalized units comes arbitrarily close to infinity as L goes up. The velocity of the growth is estimated due to computer simulations. An average density of sand is well posed despite there exist avalanches whose size grows with L . The average density tends to its limit (as $L \rightarrow \infty$) as a power function does.

Введение

Модель накопления песка¹, введенная Баком и др. в работе [1] в 1987 году, до сих пор подвергается тщательному анализу. В модели песчинки накапливаются в квадратной решетке и, когда их становится слишком много, перераспределяются по определенным правилам. Процесс перераспределения песка называется лавиной. Граничные условия предполагаются “открытыми”, т.е. песчинки, достигая края решетки, покидают ее.

Множество работ посвящены свойствам модели накопления песка, исследованы возникающие степенные законы, введено понятие самоорганизующейся критичности [2–4]. Понятие самоорганизующейся критичности строго не определяется, но объясняется как существование свойств системы, не требующих специальной настройки параметров модели. Анализ поведения самоорганизующихся систем находит практическое применение, например, при изучении динамики землетрясений [5], геомагнитного динамо [6] и финансовых рынков [7, 8].

Естественно возникает вопрос о роли крупнейших лавин, которые могут интерпретироваться как землетрясения. В работе [9] найдены предвестники крупнейших лавин (землетрясений) в модели накопления песка. Установлено, что для остальных лавин эти предвестники неэффективны. Возможна аналогия с прогнозом землетрясений, где крупнейшие землетрясения играют особую роль и, по-видимому, лучше прогнозируются. Итак, изучение свойств крупнейших событий в модели накопления песка может привести к созданию новых алгоритмов прогноза крупнейших землетрясений.

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства лавин при стремящейся к бесконечности длине L стороны квадратной решетки. Хорошо известно, что масштабирующий коэффициент, устанавливающий соответствие между размерами лавин, произошедших на разных решетках, пропорционален площади решетки. Сформулированное утверждение справедливо для лавин, размер которых меньше некоторого $s^* \sim L^2$.

Соответствие между размерами лавин на решетках различных размеров устанавливается так, чтобы соответствующие друг другу лавины составляли одну и ту же долю δ лавин в каталоге. Тогда масштабирующий коэффициент для крупных ($s > s^*$) лавин пропорционален $L^{2+\alpha}$, где α является функцией от доли δ .

¹ sand-pile в англоязычной литературе

В отличие от отдельных лавин, средние характеристики совокупности последовательных лавин асимптотически устойчивы при большом размере решетки. Исследователи указывали, что средняя плотность песчинок стабилизируется [10]. С помощью компьютерного эксперимента нами проверено, что имеет место сходимость плотности по мере и оценена скорость этой сходимости.

В разделе 1 описана модель, нахождению масштабирующего коэффициента для крупных событий посвящен раздел 2, в разделе 3 установлена сходимость плотности песчинок. Основные выводы сделаны в заключении.

Модель

Модель, описанная в этом разделе, определена в работе [2]. Квадратная решетка $\{(i, j)\}_{i, j=1}^n$ накапливает песчинки. В начальный момент времени в каждой клетке (i, j) решетки находится некоторое целое число h_{ij} песчинок. Числа h_{ij} равны 0, 1, 2 или 3. Динамика системы определяется по следующим правилам. В каждый момент времени в случайно выбранную клетку (i, j) добавляется песчинка:

$$h_{ij} \longrightarrow h_{ij} + 1. \quad (1)$$

Если полученное количество песчинок оказывается меньше четырех, то в этот момент времени больше ничего не происходит. Если полученное количество песчинок оказывается равным четырем, то песчинки перераспределяются: число песчинок в клетке (i, j) становится равным нулю, а каждая из четырех соседних клеток получает по одной песчинке

$$\begin{aligned} h_{ij} &\longrightarrow h_{ij} - 4, \\ h_{i\pm 1, j} &\longrightarrow h_{i\pm 1, j} + 1, \quad h_{i, j\pm 1} \longrightarrow h_{i, j\pm 1} + 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Если клетка (i, j) находится на границе (в углу) решетки, то одна (две) песчинки диссипирует. В результате перераспределения по формулам (2) новые клетки могут содержать четыре песчинки. Тогда перераспределение по формуле (2) продолжается до тех пор, пока существуют клетки решетки, содержащие четыре песчинки.

Процесс перераспределения песка называется лавиной. Размером лавины называется количество клеток решетки, имевших четыре песчинки во время перераспределения песка. Клетки подсчитываются с учетом кратности.

Крупные лавины на решетках различных размеров

Каталогом K_L называется совокупность последовательных лавин, произошедших на некотором временном интервале $[t_L^*, t_L^* + V_L]$ на решетке размера $L \times L$. Числа t_L^* и V_L фиксированы достаточно большими ($t_L^* = 5L^2$ и $V_L = 10L^2$).

Из работы [2] следует, что существует такое число $s^* \sim L^2$, что количество лавин размера s при $s < s^*$ пропорционально $s^{-\nu}$, где $\nu > 0$ – некоторое зависящее от L число, близкое к единице.

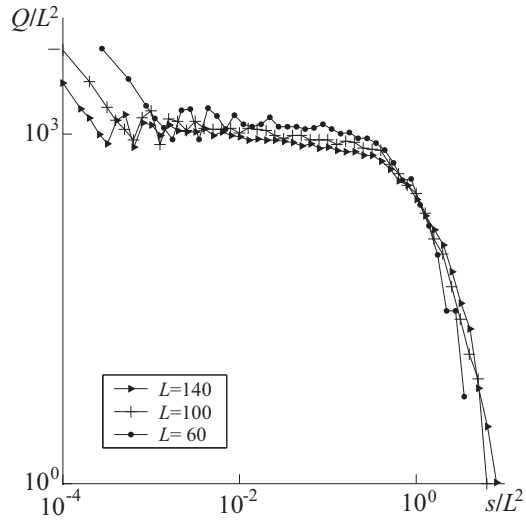


Рис. 1. Нормированный график повторяемости для трех значений длины решетки L ; $Q = C_y Q_L(s)$, масштабный множитель $C_y = 10000$

Сделанное утверждение иллюстрирует рис. 1. Лавины сортированы по интервалам, имеющим одинаковую длину в логарифмическом масштабе. Формально, для некоторого малого z_1 (на рис. 1 $z_1 = 10^{0.1}$) функция $Q_L(s)$ определяется в точках z_1, z_1^2, \dots , так, что $Q_L(z_1^k)$ равно количеству лавин из каталога K_L , имеющих размер $s \in [z_1^{k-0.05} L^2, z_1^{k+0.05} L^2]$. Тогда

$$Q_L(s) \sim s^{-\nu+1}, \quad s < s^*. \quad (3)$$

График зависимости функции $Q_L(s)$ от s называется *графиком повторяемости*.

Масштаб горизонтальной оси на рис. 1, пропорциональный S/L^2 , приводит к тому, что “плоские участки” графиков находятся один под другим. Более того, формула (3) верна на интервале $[s_0, s^*]$, где s_0 зависит от L сложным образом, а $s^* \sim L^2$. Совпадение графиков $Q_L(s)$ происходит, согласно [10], если масштаб вертикальной оси пропорционален $Q_L(s)/L^\beta$, где $\beta \approx 1.65$

Лавина называется крупной, если ее размер больше, чем s^* . В противном случае лавина называется некрупной. Заметим, что данных, представленных на рис. 1, недостаточно, чтобы сделать вывод о распределении крупных лавин.

На самом деле некрупные лавины сосредоточены внутри решетки, они практически не связаны с диссипацией песчинок на границе. Чтобы в этом убедиться рассмотрим другой естественный способ определения крупных лавин.

Рассмотрим среднее количество песчинок, диссипировавших во время лавин определенного размера. Фиксируем некоторое малое z_2 (в вычислениях $z_2 = 10^{0.1}$). Пусть $l(L, z_2^k)$ определено для всех натуральных чисел L и k как среднее количество песчинок, покинувших решетку во время лавин, которые

- находятся в рассматриваемом каталоге K_L ,
- имеют размер $s \in [z_2^{k-0.05}, z_2^{k+0.05})$.

Тогда при различных фиксированных L функция $l(L, \cdot)$ медленно возрастает по второй переменной при $s < s^*$ и удовлетворяет степенному закону

$$l(L, s) \approx Cs^\varphi, \quad s > s^*, \quad (4)$$

где $\varphi \approx 1.1$ и константа $C > 0$ не зависит от L и s . Графики функций $l(L, \cdot)$ при различных L почти совпадают, но продолжают вправо тем дальше, чем больше L (рис. 2). Существенно, что s^* одно и то же в (3) и (4). Следовательно, данное ранее определение крупных лавин применимо также при изучении диссипировавших песчинок.

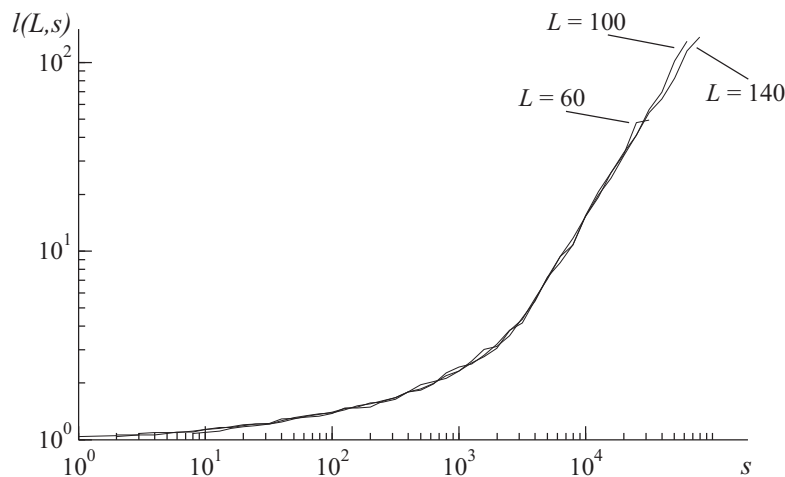


Рис. 2. Среднее количество $l(L, s)$ диссипировавших песчинок во время событий размера s для трех значений длины решетки L

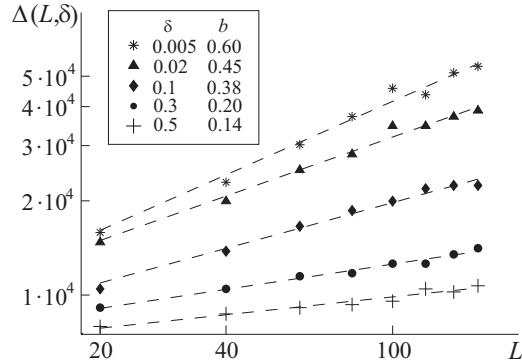
Для крупных лавин естественно ввести шкалу их размеров. Пусть $\Delta(L, \delta)$ – такой размер лавин, что все крупные лавины, попавшие в каталог K_L и имеющие размер больший, чем $\Delta(L, \delta)$, составляют долю δ среди всех крупных лавин каталога. Например, $\Delta(L, 1) = s^*$. Функция $\Delta(L, \delta)$ устанавливает соответствие между размерами лавин, произошедших на различных решетках.

Исследуем численно асимптотические свойства функции $\Delta(L, \delta)$. Существует такое зависящее от длины каталога число $\delta_0 = \delta_0(V_L) > 0$, что при любом фиксированном δ , $\delta_0 \leq \delta \leq 1$, функция $\Delta(\cdot, \delta)$ является степенной функцией по L (рис.3):

$$\Delta(L, \delta) \approx C(\delta)L^{2+\alpha(\delta)}. \tag{5}$$

Рис. 3. Зависимость размера $\Delta(L, \delta)$ лавин, составляющих долю δ крупных лавин каталога, от длины решетки L .

Наклон b прямых (штриховые линии), соответствующих различным δ , приведен в легенде

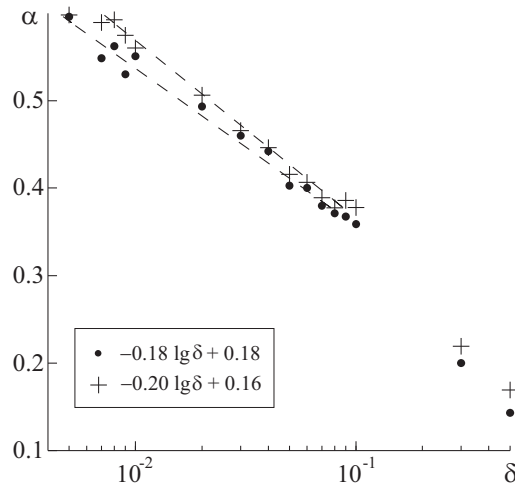


При каждом фиксированном L зависимость α от δ сложная. При малых L (рис. 4)

$$\alpha(\delta) \approx C_1(V_L) \ln(1/\delta) + C_2(V_L). \tag{6}$$

Рис. 4. Функции $\alpha(\delta)$ при длинах решетки $L = 60$ (кружки) и $L = 140$ (крестики).

Уравнения их линейных аппроксимаций (штриховые линии) приведены в легенде



Чтобы удовлетворять неравенству (5) в каталоге, в силу его конечности, недостаточно лавин, отвечающих малым δ . Поэтому δ_0 зависит от V_L , причем $\delta_0 \rightarrow 0$ при $V_L \rightarrow \infty$.

Заметим, что $\alpha(\delta) \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow 0$. Действительно, рассмотрим решетку, в каждой клетке которой находится три песчинки. Тогда при бросании дополнительной песчинки в центр решетки происходит лавина самого большого размера, который только возможен в модели. Ее размер, очевидно, является пределом функции $\Delta(L, \delta)$ при $\delta \rightarrow 0$. Согласно компьютерному эксперименту, размер этой лавины равен

$$\Delta(L, 0) = C_3 L^3. \quad (7)$$

Напомним, что совмещение графиков повторяемости некрупных лавин, произошедших на решетках различных размеров, происходит при сжатии оси размеров в L^2 раз (см. рис. 1). Следовательно, нормированный размер лавин s/L^2 не зависит от L для некрупных лавин, но, согласно (5), пропорционален $L^{\alpha(\delta)}$ для крупных лавин, составляющих долю δ среди всех крупных лавин.

Сходимость плотности песчинок

Плотностью ρ_L песчинок назовем среднее число песчинок в решетке: $\rho_L = L^{-2} \sum_{i,j=1}^L h_{ij}$. Величина ρ_L является функцией от времени $\rho_L(t)$, так как эволюционирует вместе с песчинками. Пусть $\bar{\rho}_L$ — осреднение функции $\rho_L(t)$ по отрезку $[t_L^*, V_L]$, определяющему каталог K_L :

$$\bar{\rho}_L = V_L^{-1} \sum_{t=t_L^*}^{t_L^*+V_L-1} \rho_L(t).$$

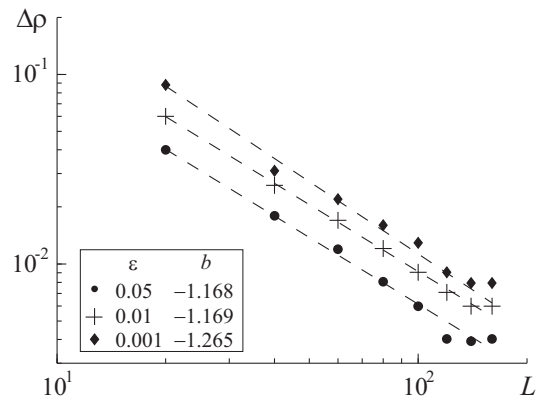
Тогда, во-первых, существует такое число $\rho_\infty \approx 2.11$, что $\bar{\rho}_L \rightarrow \rho_\infty$ при $L \rightarrow \infty$. (Число ρ_∞ , приведенное в [10], равно 2.12; разница возникла из-за того, что в [10] песчинки добавлялись только в центральную часть решетки.) Во вторых, для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $C_\varepsilon > 0$ и $\gamma \approx 1.15$ такие, что вероятность

$$\mathbf{P}\{|\rho_L(t) - \bar{\rho}_L| > C_\varepsilon L^{-\gamma}\} = \varepsilon, \quad (8)$$

где C_ε не зависит от L , t_L^* и V_L . Для иллюстрации равенства (8) обозначим через $\Delta\rho(L, \varepsilon)$ такое число, что доля времени t/V_L , для которой $|\rho_L(t) - \bar{\rho}_L| > \Delta\rho$, равна ε . Равенство (8) утверждает, что $\Delta\rho$ убывает по переменной L как степенная функция при различных ε . Указанное степенное убывание видно на рис. 5.

Рис. 5. Зависимость функции $\Delta\rho(L, \varepsilon)$ от длины решетки L при различных ε .

Наклон b линейных аппроксимаций (штриховые линии) функции $\Delta\rho(\cdot, \varepsilon)$ при различных ε приведен в легенде



Следовательно, семейство плотностей $\rho_L(t)$ сходится к ρ_∞ по мере при $L \rightarrow \infty$.

Заключение

В статье исследовалась модель накопления песка, введенная Баком и др. в работе [1]. Определены крупные лавины в модели как лавины, не удовлетворяющие степенному закону убывания графика повторяемости. Найдена асимптотика размеров крупных лавин при стремящемся к бесконечности линейном размере L решетки. В частности, установлено, что размер крупных лавин, произошедших на разных решетках, но составляющих одну и ту же долю δ среди всех крупных лавин, растет с ростом L как $L^{2+\alpha}$, где $\alpha > 0$ зависит от доли δ .

Полученный результат согласуется с утверждением о нелокальности крупных лавин, описанным в работе [10]. Действительно, устраняющая зависимость от L нормировка размера некрупных лавин – умножение на L^{-2} . Однако, в этом случае нормированный размер крупных лавин неограниченно возрастает с ростом L как L^α , $\alpha > 0$.

Крупные лавины, в отличие от некрупных, являются диссипативными. Именно диссипативность, по видимому, обеспечивает специальные масштабные свойства крупных лавин и дает возможность прогнозировать крупные лавины с определенной эффективностью [9].

Несмотря на существование лавин бесконечно большого нормированного размера, плотность песчинок асимптотически стабилизируется. В данной статье этому утверждению придается строгий смысл. Определяется средняя плотность песчинок на каталоге достаточно большой длины. Тогда средняя плотность сходится по мере к некоторому предельному значению при $L \rightarrow \infty$.

Введенная шкала размеров лавин позволяет сравнивать произвольные функционалы, вычисленные для решеток различных размеров. Полученные асимптотические свойства модели возможно окажутся полезными при изучении родственных моделей, связанных с самоорганизующейся критичностью, и при исследовании крупнейших событий в “больших системах”.

Работа выполнена при частичной поддержке ИНТАС (проект 01-0748) (М.Г.Шнирман).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.59. P.381–384.
2. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol.38. P.364–374.
3. *Grassberger P., Manna S.* Some more sandpiles // *J. Physique.* 1990. Vol.51. P.1077–1098.
4. *Dhar D.* The abelian sandpile and related models // *Physica A.* 1999. Vol.263. P.4–25.
5. *Bak P., Tang C.* Earthquakes as a self-organized critical phenomenon // *J. Geophys. Res.* 1989. Vol.94. P.15635–15637.
6. *Blanter E.M., Shnirman M.G.* Criticality in a dynamic mixed system // *Phys. Rev. E.* 2001. Vol.64. P.6123–6132.
7. *Sornette D., Johansen A., Bouchaud J.-P.* Stock market crashes, precursors, and replicas // *J. Phys. I France.* 1996. Vol.6. P.167–175.
8. *Johansen A., Leodit O., Sornette D.* Crashes as critical points // *Inter. J. of Theor. and Appl. Finance.* 2000. Vol.3, N 2. P.219–255.
9. *Шанова А. Б., Шнирман М. Г.* Сценарий сильных событий в модели накопления песка // *Проблемы теоретической сейсмологии и сейсмичности.* М.: Наука, 2002. С.267–277. (Вычисл. сейсмология; Вып.33).
10. *Carlson J. M., Swindle G. H.* Sandpiles, singularities, and scaling // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1995. Vol.92. P.6712–6719.