# IV. ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СЕЙСМОЛОГИИ

УДК 550.310:517.984 54

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ В ОБРАТНОЙ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

А.Н. КУЗНЕЦОВ

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Обсуждаются проблемы, возникающие при восстановлении негладких параметров Ламе и плотности по данным распространения поверхностных сейсмических волн. Рассматриваемый алгоритм восстановления использует метод Гельфанда – Левитана – Марченко решения обратных задач для уравнения Штурма – Лиувилля. Этот метод переформулирован с целью его приложения к сейсмологическим задачам. На примере среды с изломом на графике модуля сдвига и с разрывной плотностью показывается, что ядро интегрального оператора, который играет ключевую роль в методе, оказывается в этом случае сингулярным. Обсуждаются пути подхода к задачам с разрывными параметрами Ламе. В типичном примере вычислены спектральные меры задач и ядра интегральных операторов.

## ON SINGULARITIES OF INVERSE SEISMOLOGICAL PROBLEM

A.N. KUZNETSOV

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The problems arising in reconstruction of non smooth Lame parameters and density by the data of the seismic surface vawes propagation are discussed. The considered algorithm of reconstruction is based on Gelfand – Levitan – Marchenko method for the solution of inverse problems for Shturm – Liouville equation. We reformulate the method to apply it in seismological problem. On the example of medium with break of shear modulus graph and with discontinuous density it is shown that the kernel of integral operator which plays the key role in the method is singular. The approach to the solution of the problems with discontinuous Lame parameters is discussed. Spectral measures and integral operator kernels are calculated in the typical example.

---

## Введение

Прямая задача сейсмологии – определить упругие свойства в толще Земли, пользуясь данными сейсмограмм – для системы уравнений упругости ставится как обратная задача. В ней требуется найти коэффициенты системы, если известна определенная информация о граничных свойствах решений. В ряде работ (в том числе в [1–4]) схема Гельфанда–Левитана–Марченко решения спектральных обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля приспосабливалась к сейсмологическим уравнениям. Эти обыкновенные уравнения получаются из системы уравнений линейной упругости методом разделения переменных. Конечно, при этом используется свойство горизонтальной или сферической однородности среды. Система обыкновенных уравнений распадается на уравнение для компоненты Лява (1) и систему двух уравнений, управляющую волнами Рэлея (см. [5, 6] ). Неизвестные в этих уравнениях являются трансформантами Фурье компонент Лява и Рэлея волны смещения. Благодаря однородности эти неизвестные зависят не от трех, а только от двух параметров – частоты $\omega$ и волнового числа $\xi$. Авторы вышеупомянутых работ преобразуют уравнения к виду Штурма–Лиувилля, для волн Лява – к скалярному, а для волн Рэлея – к двумерному с матричным потенциалом. Частота при этом фиксируется, а $\xi^2$ становится спектральным параметром. В получившихся спектральных задачах приходится, естественно, выявлять сейсмологическую специфику. Метод работает успешно, т. е., удается доказать теоремы существования, если предположить, что восстанавливаемые параметры достаточно гладки. Это не совсем характерно для сейсмологических разрезов, где на графиках изменения этих параметров по глубине можно наблюдать изломы и даже скачки. Возникает вопрос, можно ли распространить работающую в гладком случае процедуру и на эти случаи нарушения гладкости в отдельных точках? Мы рассмотрим пути преодоления возникающих трудностей на модельном примере уравнения для волны Лява, оставляя обобщения на будущее.

## 1. Два примера

Уравнение для компоненты Лява $v = v(x, \xi)$ сейсмической волны в плоско слоистой среде после разделения переменных имеет вид [5, 6]:

$$(\mu v')' + (\omega^2 \rho - \xi^2 \mu) v = 0. \tag{1}$$

Волна затухает с глубиной: $v \to 0$ при $x \to \infty$, и на поверхности удовлетворяет условию, которое выражает отсутствие нормальных напряжений: $v'(0,\xi) = 0$. В обратной задаче частота $\omega$ считается фиксированным параметром, который может принять одно или несколько значений. Функции $\rho(x)$ – плотность и $\mu(x)$ – модуль сдвига требуется определить.

Методика решения обратной задачи [1–4] содержит важный для нее шаг – преобразование уравнений к задаче Штурма – Лиувилля вида:

$$\begin{aligned} & y'' + q\,y = \xi^2 y, \qquad x \ge 0, \\ & y'(0) = \theta\, y(0), \\ & y(\infty) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

В случае негладкой среды уже этот этап чреват неприятностями. Вспомним [1] формулы перехода от (1) к (2) и покажем, что потенциал может равняться дельта-функции Дирака: $q(x) = \delta(x-a)$, $a > 0$ в среде, которая вполне допустима с физической точки зрения. Преобразование задается формулой $v = \mu^{-1/2}\, y$ и получается, что

$$\begin{aligned} & q = \frac{1}{4}\mu^{-2}\mu'^2 - \frac{1}{2}\mu^{-1}\mu'' + \omega^2\rho\mu^{-1}, \\ & \theta = 2\mu^{-1}(0)\mu'(0). \end{aligned} \tag{3}$$

Для достижения цели $(q(x) = \delta(x-a))$ параметры $\rho$ и $\mu$ можно взять из семейства: $\mu = 2(x-a)_+ + 1 + b(x-a)^2$, $\rho = b - H(x-a)$. Здесь $H$ – функция Хевисайда: $H'(x) = \delta(x)$, $H(-1) = 0$, и операция $(\ldots)_+$ определяется формулой $f(x)_+ = f(x)\ H(x)$ для произвольной функции $f(x)$. Нетрудно проверить, что, например, при $b = 2$ оба параметра будут положительны на полуоси. Следовательно, они могут соответствовать физически реальной среде, так как их абсолютные значения можно отрегулировать масштабными множителями.

В случае, когда $\mu$ разрывен, скажем, $\mu = \gamma + \beta\ H(x-a)$, выражение (3) теряет смысл даже как обобщенная функция, поскольку такие функции не всегда можно перемножать, а здесь требуется возвести $\mu' = \beta\delta(x-a)$ в квадрат.

## 2. Метод Гельфанда–Левитана–Марченко

Известная [7–10] схема будет изложена для задачи (2), главным образом, чтобы воспользоваться ею в следующем параграфе, однако по возможности в общем виде. Затем по изложенной схеме будет рассчитан наш пример. Из-за сингулярности задачи с одного края целесообразно использовать обобщенные функции и характерные для их теории рассуждения.

Метод начинается со спектральной теории [8–10].

В силу краевого условия собственная функция задачи (2), т. е., ненулевое решение системы (2), не обращается в нуль и при $x = 0$. Пусть $y = y(x) = y(x, \xi)$ – семейство (по $\xi$) таких собственных функций, нормированных вдобавок условием $y(0) = 1$. Будем считать потенциал $q$ быстро убывающим с ростом $x$, а равенство $y(\infty) = 0$ понимать в смысле обобщенных функций, т. е., как слабый предел при $x \to \infty$ обобщенных функций от $\xi$. Тогда спектр задачи, т. е., совокупность тех $\xi$, при которых она разрешима, будет содержать конечное число точек с $\mathbf{Re}\,\xi \neq 0$ и всю прямую $\xi = \mathrm{i}k,\ \ k \in \mathbb{R}$. Дискретным точкам отвечают экспоненциально убывающие на бесконечности собственные функции. Функции сплошного спектра имеют асимптотики вида

$$y(x) \to c_1 \cos k\,x + c_2 \sin k\,x, \tag{4}$$

так как потенциал быстро убывает. Условие ортогональности собственных функций с различными собственными значениями может быть записано в виде

$$\sigma'(\xi) \int\limits_0^\infty y(x, \xi)\; y(x, \eta)\, \mathrm{d}\, x = \delta(\xi - \eta). \tag{5}$$

В этом равенстве $\xi$ и $\eta$ могут быть точками как дискретного, так и непрерывного спектра, считая что в дискретных точках функция $\sigma$ имеет скачки (т. е., $\sigma(\xi) = \sigma(\eta - 0) + H(\xi - \eta)(\sigma(\eta + 0) - \sigma(\eta - 0))$ в окрестности такой точки. Так определять спектральную функцию позволяет то обстоятельство, что в рассматриваемых задачах дискретный спектр расположен на вещественной оси). Интеграл в этих точках конечен. В окрестности точек сплошного спектра интеграл понимается в обобщенном смысле как слабый предел интегралов по конечному отрезку на финитных функциях от двух переменных $(\xi, \eta)$. Равенство нулю интеграла при $\xi \neq \eta$ стандартным образом следует из самосопряженности задачи (2), но и здесь интеграл приходится понимать обобщенно. Следовательно, интеграл представляет собой обобщенную функцию с носителем на диагонали. Такие функции могут быть только суммой производных $\delta(\xi - \eta)$ с коэффициентами, зависящими от $\xi$ или от $\eta$, это все равно. Производные старше нулевой отсутствуют, это следует из асимптотики (4) функции $y(x, \xi)$ на бесконечности по $x$ в точках сплошного спектра. Функция $\sigma$ называется спектральной функцией, ее дифференциал – спектральной мерой. Очевидно, $\sqrt{\sigma'(\xi)}\; y(x, \xi)$ – $\mathbf{L}_2$-ортонормированная система собственных функций (снова в обобщенном смысле).

Прямое и обратное преобразования Фурье задачи определятся формулами:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_0^\infty f(x)y(x,\xi)\,\mathrm{d}x,$$

$$g(x) = (\widehat{f}(\xi))\check{}(x) = \int \widehat{f}(\xi)y(x,\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

Интегрирование во втором равенстве производится по носителю меры $\mathrm{d}\sigma$, который, повторим, состоит из мнимой оси и конечного числа точек. Не будем загромождать текст определениями функциональных пространств, в которых справедлива та или другая формула. Эти пространства получаются пополнением пространства гладких финитных функций в подходящей для формулы топологии. Пользуясь (5), можно проверить, что разность $g-f$ (обобщенно) ортогональна всем функциям $y(x,\xi)$, поэтому, если система $(y(x,\xi))$ полна, то справедлива формула обращения: $g = f$. Иначе говоря, операция $f(x) \longmapsto g(x)$ задает ортогональную проекцию на подпространство, порожденное собственными функциями.

Так как $f(x) = (f * \delta)(x)$ и $(\delta(x-t))\widehat{} = y(t,\xi)$, то условие полноты можно выразить формулой обращения для семейства функций $\delta(x-t)$

$$\int y(t,\xi)\; y(x,\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi) = \delta(x-t),$$

которая эквивалентна общей формуле обращения

$$f(x) = (f*\delta)(x) = \int \widehat{f}\,(\xi)\; y(x,\xi)\,\mathrm{d}\sigma(\xi).$$

Рассмотрим теперь сам метод [9, 10]. В обратной спектральной задаче для (2) известной считается спектральная функция, а найти требуется $q$.

Существует интегральный оператор

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int_0^x K(x,t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{6}$$

преобразующий решение $\psi$ задачи Коши $\psi(0) = 1$, $\psi'(0) = \theta_2$ для оператора (2) с $q = q_2$ в решение $\varphi$ задачи Коши $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \theta_1$ для того же оператора с $q = q_1$. Будем именовать эти задачи первой и второй задачами Коши в соответствии с нумерующими буквы $q$ и $\theta$ индексами.

Оператор не зависит от параметра $\xi$, который рассматривается как свободная переменная – одна и та же в обеих задачах Коши. Ядро $K$ при всех $t$ находится из интегрального уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко с ядром, определяющимся по спектральным функциям $\sigma_1$, $\sigma_2$. Тогда, если $q_2$ известно, искомое $q_1$ может быть выражено через $K$. В этой логике нам не ясно, откуда взялось $K$, однако приведем подробности.

Пусть $\psi$ – решение второй задачи Коши. Тогда, если $\varphi$ из (6) подставить в соответствующее ему уравнение и произвести напрашивающиеся интегрирования по частям с использованием уравнений для $\psi$, то получится, что $\varphi$ – решение первой задачи Коши, если только $K$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + (q_1(x) - q_2(t))K = 0, \tag{7}$$

$$2(K(x,x))' + q_1(x) - q_2(x) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t}(x,0) = \theta_2\, K(x,0), \tag{9}$$

$$K(0,0) = \theta_1 - \theta_2. \tag{10}$$

Получившаяся краевая задача для $K$ всегда однозначно разрешима, если конечно функции $q_n$ не слишком обобщенны. Чтобы получить решение, можно обратить волновой оператор в уравнении (7) и свести задачу к системе интегральных уравнений, легко разрешимой методом последовательных приближений. Из уравнений видно, что $K$ не зависит от $\xi$. Это, вероятно, несущественно для задачи обращения, и отчасти объясняется тем, что в систему (7)–(10) входят только разности потенциалов. Это будет не так в задачах с граничными условиями, зависящими от $\xi$. В ходе решения обратной задачи задается потенциал $q_2$ (например, равным нулю), из уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко находится $K$, после чего уравнение (8) дает искомое $q_1$ .

Выведем теперь уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко [9, 10]. Если в качестве $\psi$ взять собственную функцию $y_2(x)$ второй задачи (2) (т.е. задачи (2) с $q = q_2$, $\theta = \theta_2$), то интеграл в уравнении (6) окажется преобразованием Фурье функции $K(x,t)$ с носителем в множестве $0 \le t \le x$. Применив обратное преобразование, получим

$$K(x,t) = -\delta(x-t) + \int \varphi(x)\, y_2(t)\, \mathrm{d}\sigma_2. \tag{11}$$

Следовательно,

$$\operatorname{supp} \int \varphi(x)\, y_2(t)\, \mathrm{d}\sigma_2 \subset \{0 \le t \le x\}. \tag{12}$$

И, аналогично,

$$\operatorname{supp}\int \psi(t)\, y_1(x)\,\mathrm{d}\sigma_1 \subset \{0 \le x \le t\}. \tag{13}$$

Перепишем (11) в виде

$$K(x,t) = -\delta(x-t) + \int \varphi(x)\, y_2(t)\,\mathrm{d}\sigma_1 - \int \varphi(x)\, y_2(t)\,\mathrm{d}(\sigma_1-\sigma_2).$$

На носителе меры $\mathrm{d}\sigma_1$ справедливы равенства $\varphi(x) = y_1(x)$, $y_2(t) = \psi(t)$, поэтому при $t < x$ согласно (13) $\int \varphi(x)\, y_2(t)\,\mathrm{d}\sigma_1 = 0$. Значит, при $t < x$ $K(x,t) = \int \varphi(x)\, y_2(t)\,\mathrm{d}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Положим здесь $\sigma_3 = \sigma_1 - \sigma_2$ и подставив $\varphi$ из формулы (6), в которой $\psi = y_2$, получим уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко:

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)\, F(s,t)\,\mathrm{d}\, s = 0 \tag{14}$$

с ядром

$$F(x,t) = \int y_2(x)\, y_2(t)\,\mathrm{d}\sigma_3. \tag{15}$$

Формулы (11) и (12) кажутся наиболее важными достижениями метода. Для их выполнения необходимо, чтобы система собственных функций была полна, что молчаливо предполагалось при использовании формулы обращения.

## 3. Вычисление спектральных функций

Пользуясь уравнением (2) и два раза интегрируя по частям, можно получить формулу

$$(\xi^2-\eta^2)\int_0^\infty y(x,\xi)\; y(x,\eta)\,\mathrm{d}\, x = \left(y'(x,\xi)\; y(x,\eta) - y(x,\xi)\; y'(x,\eta)\right)\Big|_0^\infty .$$

Сочетав ее с (5), получим формулу для вычисления спектральной функции

$$\sigma'(\xi)(\xi^2-\eta^2)^{-1} V\Big|_0^\infty = \delta(\xi-\eta), \tag{16}$$

где $V = V(x,\xi,\eta) = y'(x,\xi)\,y(x,\eta) - y(x,\xi)\,y'(x,\eta)$ – это, конечно, вронскиан двух собственных функций, равный нулю при $x = 0$ и при различных $\xi$ и $\eta$, согласно граничному условию в (2). Следовательно, вычисление $\sigma'$ по формуле (16) сводится к раскрытию неопределенности в левой части при $x = \infty$. Заботиться при этом нужно лишь о множителе перед $\delta$-функцией, все остальное все равно сократится.

Рассмотрим сначала простейшую задачу (2) с нулевым потенциалом. Положим $q_2 = 0$, $\theta_2 = 0$. Тогда $y_2 = \cos k\,x$, $\quad(\xi = \mathrm{i}\,k)$. Дискретного спектра у этой задачи нет. Вычисляем, полагая $\eta = \mathrm{i}\,l$

$$(\xi^2-\eta^2)^{-1}V = (\xi^2-\eta^2)^{-1}(l\cos k\,x\sin l\,x - k\sin k\,x\cos l\,x) \sim$$
$$\sim (\xi^2-\eta^2)^{-1}\,k\sin(l-k)\,x \sim (2\,k)^{-1}\,(l-k)^{-1}k\sin(l-k)\,x \sim \frac{1}{2}\pi\delta(k-l).$$

Знак эквивалентности $\sim$ обозначает пренебрежение членами, которые при $(\xi=\eta)$ бесконечно малы по сравнению с $\delta(\xi-\eta)$. (Формальное определение: $f(x,\xi,\eta)\sim 0$, если $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{x\to\infty}\int\limits_{\xi-\eta<\epsilon} f(x,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0$ для всякой гладкой функции $\varphi(\xi,\eta)$.) Использовались формулы: $\sin k\,x\sim 0$, $\cos k\,x\sim 0$, $\dfrac{\sin k\,x}{k}\sim\pi\delta(k)$. Таким образом, $\sigma_2' = 2/\pi$.

Рассмотрим теперь первую задачу (2) с данными примера из разд. 1 $q_1 = \delta(x-a)$, $\theta_1 = \theta$ (из формулы для $\theta$ в (3) нетрудно получить, что $\theta = -8\,a/(1{+}2\,a^2)$ при $b = 2$). Задача Коши без труда решается, решение склеивается из экспонент $\mathbf{e}^{\pm\xi\,x}$ с постоянными вне точки $a$ коэффициентами $A$ и $B$

$$\varphi = A\,\mathbf{e}^{\xi\,x} + B\,\mathbf{e}^{-\xi\,x} =$$
$$= \gamma\,\mathbf{e}^{\xi\,x} + (1-\gamma)\,\mathbf{e}^{-\xi\,x} + \beta\,H(x-a)\left(\mathbf{e}^{\xi\,x} - \mathbf{e}^{-\xi\,x+2\,a\,\xi}\right),$$

где $\gamma = \dfrac{\xi+\theta}{2\,\xi}$, $\beta = -\dfrac{1}{2\,\xi}\left(\gamma + (1-\gamma)\,\mathbf{e}^{-2\,a\,\xi}\right)$ и ступенчатые коэффициенты $A$ и $B$ определяются самой формулой.

Дискретный спектр определяется при $x > a$ соотношениями $A = 0$, $\mathbf{Re}\,\xi < 0$, либо соотношениями $B = 0$, $\quad\mathbf{Re}\,\xi > 0$, так как только в этих случаях решение задачи Коши не растет на бесконечности, а экспоненциально убывает. Есть ли в нем точки и сколько их, мы исследовать не будем, отметим лишь, что уравнения ($A = 0$ или $B = 0$) трансцендентны. Никаких неприятностей от них для ядра $F$ ожидать не приходится, так как число их должно быть конечным. Согласно (15) вклад в $F$ от любой точки $\xi_0$ дискретного спектра составит гладкое слагаемое вида $C_0\cos(x\,\xi_0)\cos(t\,\xi_0)$.

Займемся сплошным спектром. Такое же вычисление, как в простейшем случае, но несколько более громоздкое дает: $V\,(\xi-\eta)^{-1}\sim$ $\sim 4\,\mathrm{i}\,\xi\,(\xi-\eta)^{-1}\,A\,B\,\sin(k-l)x$. Отсюда, согласно (16), немедленно следует:

$$\sigma_1'=\frac{1}{2\,D\,\pi},\qquad \sigma_3'=\sigma_1'-\sigma_2'=\frac{1-4\,D}{2\,\pi\,D},\tag{17}$$

где $D=A\,B\Big|_{x=\infty}=(\gamma+\beta)\left(1-(\gamma+\beta\,\mathbf{e}^{2\,a\,\xi})\right)$. Подставив сюда $\gamma$ и $\beta$, находим первые члены асимптотики $D$ при $k\to\infty$: $D\sim\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sin 2\,a\,k}{4\,k}$. Теперь из (17) получим первый член асимптотики для разности спектральных мер: $\sigma_3'\sim-\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin 2\,a\,k}{k}$.

## 4. Ядра интегральных операторов

Теперь имеется все ($\sigma_3'$ и $y_2=\cos k\,x$), для того чтобы по формуле (15) вычислить сингулярную часть функции $F(x,t)$ . Гладкий довесок к ней здесь нас не интересует. Для выражения этой неточности снова используем знак $\sim$:

$$F(x,t)\sim-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\cos k\,x\,\cos k\,t\frac{\sin 2\,a\,k}{k}\,\mathrm{d}k=-\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^\infty(\sin k(2\,a+x+t)+$$

$$+\sin k(2\,a-x-t)+\sin k(2\,a+x-t)+\sin k(2\,a-x+t))\frac{\mathrm{d}\,k}{k}\sim$$

$$\sim-\frac{1}{2}\big(H(2\,a+x+t)+H(2\,a-x-t)+H(2\,a+x-t)+H(2\,a-x+t)\big).$$

В последней эквивалентности использовалось равенство

$$\int\limits_0^\infty\sin k\,x\frac{\mathrm{d}k}{k}=\begin{cases}+\pi/2 & \text{при } x>0\\ -\pi/2 & \text{при } x<0\end{cases}.$$

Скачок на $\pi$ мы выделили, а постоянную отбросили. Заметим, что в области определения $F$: $\{x,t\geq 0\}$ скачки имеют лишь три последних слагаемых $H$.

Ядро $K$ лучше находить не из интегрального уравнения (14), а из системы (7)–(10):

$$K(x,t)=\theta\,(x-a)_+ +\theta-\theta\left(\frac{x+t}{2}-a\right)_+ -\frac{1}{2}H\left(\frac{x+t}{2}-a\right)-$$

$$-\theta\left(\frac{x-t}{2}-a\right)_+ -\frac{1}{2}H\left(\frac{x-t}{2}-a\right).$$

Последняя формула, несмотря на "страшный" вид, находится просто. Напомним, что $q_2 = 0$, $\theta_2 = 0$, $q_1 = \delta(x-a)$, $\theta_1 = \theta$. Если $x < a$, то $q_1(x) = 0$ и решением задачи здесь будет постоянная $K(x,t) = \theta$. После этого можно слагаемое $q_1 K$ в уравнении (7) заменить на $\theta\,\delta(x-a)$, оно станет правой частью уравнения и тогда $K$ находится в виде $K = K_0 + K_1(x+t) + K_2(x-t)$, где $K_0 = \theta\,(x-a)_+$ есть частное решение неоднородного измененного уравнения (7), а $K_1$ и $K_2$ – бегущие в противоположные стороны волны, которые легко находятся из граничных условий (8)–(10).

Мы видим, что разрывы функций $K$ и $F$ согласуются, т. е. $K+F$ – гладкая функция (например, слагаемые из $K$ и $F$: $H(\frac{x+t}{2} - a) + H(2a - x - t) = 1$). Это указывает на то, что в пропущенных вычислениях спектральной функции $\sigma_1$ не очень много ошибок.

## Заключение

Скачкообразные особенности ядер $F$ и $K$ все же позволяют решать интегральные уравнения (6) и (14) методом последовательных приближений. Можно предположить, что при отсутствии разрывов в модуле сдвига неинтегрируемых особенностей у ядер не появится. Вероятно появление логарифмических особенностей. В формуле для $F$ они не появились только потому, что к функции $1/x$ применялось синус-преобразование Фурье, полное преобразование уже дало бы такую особенность.

В нашем простейшем примере разрывы ядер сосредоточились на характеристиках волнового оператора. Это, конечно, не ответ на вопрос, а постановка задачи. Вообще, действия с разрывными функциями требуют соответствующего аппарата. Для теории достаточно обобщенных функций, но численные расчеты проводить с ними не просто.

Ясно, что операторы с разрывными параметрами Ламе нельзя прямо приводить к форме Штурма–Лиувилля. Возможно, теорию обратной задачи можно распространить на уравнения, записанные в другой форме. Например, перейти от дифференциальных уравнений к интегральным, но это потребует пересмотра всей схемы рассуждений.

В сейсмологических задачах в качестве данных рассеяния рассматривают [1–4] не спектральную меру, а функции Вейля – например, в наших обозначениях $W(k) = \varphi(0,k)(\varphi'(0,k) - \theta\varphi(0,k))^{-1}$. По этой функции может быть вычислена спектральная мера, и обратно [3, 8, 9].

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркушевич В.М., Резников Е.Л.* Исследование строения симметричной твердой среды по стоячим SH-волнам на поверхности // Теоретическая и вычислительная геофизика. М.: Междувед. геофиз. комитет. 1974. N 2. С.5–34.
2. *Маркушевич В.М., Хенкин Г.М.* Явные формулы для восстановления упругих параметров полупространства по поверхностным волнам Рэлея // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.167–174. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).
3. *Новикова Н.Н., Хенкин Г.М.* О восстановлении оператора Штурма–Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.174–184. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).
4. *Beals R., Henkin G.M., Novikova N.N.* The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math.Phys. 1995. Vol.36, N 12. P.6688–6708.
5. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Том 1. М.: Мир, 1983. 520 с.
6. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
7. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 330 с.
8. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 238 с.
9. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
10. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985. 472 с.