

УДК 550.34

**ФОРМИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОЧАГА  
ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ:  
АНАЛОГИЯ С ФАЗОВЫМ ПЕРЕХОДОМ**

**Ю.С. ТЮПКИН**

Геофизический центр Российской академии наук, Москва

Область потенциального очага землетрясения ассоциируется с областью, в которой взаимодействие трещин приводит к самоорганизации процесса разрушения. Предполагается, что переход процесса разрушения в стадию самоорганизации может быть описан с помощью формализма, аналогичного феноменологической теории фазовых переходов второго рода. Обсуждается модель, в которой основные "интегральные" особенности поведения системы, связанные с взаимодействием трещин, учитываются с помощью введения в рассмотрение двух дополнительных параметров, характеризующих степень разрушения материала и степень влияния взаимодействия трещин на процесс разрушения. Показано, что учет взаимодействия трещин ускоряет разрушение в области потенциального очага по сравнению с окружающей средой. Обсуждаются некоторые аспекты обобщения модели на случай, когда существенно пространственная неоднородность разрушения среды.

**FORMATION OF POTENTIAL SOURCE OF  
EARTHQUAKE:  
ANALOGY WITH PHASE TRANSITION**

**Yu.S. TYUPKIN**

Geophysical Center, Russian Academy of Sciences, Moscow

The area of a potential source of earthquake is associated with area in which interaction of cracks results in self-organizing process of destruction. It is supposed, that transition of process of damage in a stage of self-organizing can be described with the help of the formalism similar to the phenomenological theory of phase transitions of the second kind. The model in which the generalized features of system initiated by interaction of cracks are taken into account with the help of two additional parameters describing a degree of damage of a material and a degree of influence of interaction of cracks on process of destruction is discussed. It is shown, that the account of interaction of cracks accelerates destruction of material in the area of the potential source, in comparison with an environment. Some aspects of generalization of model on a case when spatial heterogeneity of damage of environment is essential are discussed.

## Введение

Проявления процесса подготовки сильного землетрясения в виде аномалий различных процессов часто регистрируются на достаточно большой территории  $\Omega$ , причем эпицентр землетрясения может находиться как в центре, так и на краю этой области и сама область зависит от того, по аномалиям каких процессов она идентифицируется. Задачи, связанные с поиском предвестников землетрясений, обычно ориентированы на анализ процессов в этой области. Размеры области  $\Omega$ , как правило, существенно больше размера очага землетрясения. Однако помимо области  $\Omega$  в процессе подготовки землетрясения должна возникать развивающаяся со временем  $t$  область  $\Omega_S(t)$ , в которой происходит подготовка собственно макроразрушения. Мы будем называть областью потенциального очага землетрясения область  $\Omega_S(t)$  [1, 2], размеры которой в максимальном проявлении имеют порядок размера очага землетрясения.

В данной работе рассмотрен процесс формирования потенциального очага землетрясения в случае, когда землетрясение готовится вне области существующего разлома.

Идея стадийности и иерархичности процесса формирования области разрушения и перехода его в неустойчивую фазу на стадии собственно разрушения были впервые отчетливо сформулированы в работе В.И. Мячкина и др. [3]. Позднее, соображения о процессе формирования потенциального очага землетрясения с учетом иерархической блоковой структуры геофизической среды были высказаны в работе М.А. Садовского и В.Ф. Писаренко [4]. Именно в этой работе было введено понятие “активных слоев”, в объемах которых часть поступающей извне энергии сохраняется в “упругодеформированных отдельностях материала и проявляется в упругой реакции слоя”, и сделано предположение, что по мере развития процесса подготовки землетрясения объем “активных слоев” охватывает (по порядку величины) весь объем взаимодействующих подблоков и, соответственно, растет величина накопленной упругой энергии. Когда объем “активных слоев” приближается к размеру взаимодействующих блоков, система теряет устойчивость и происходит землетрясение. В работе также отмечалась возможность подобия этого процесса на разных масштабных уровнях.

Похожие соображения лежат в подходе к процессу формирования очаговой зоны на основе физической мезомеханики структурно-неоднородных тел [5–7]. Этот подход основан на концепции структурных уровней деформации и разрушения. Его смысл состоит в том, что

на стадии предразрушения в области очага разрушения формируется система структурных и масштабных уровней деформации. Процесс подготовки разрушения рассматривается как многоуровневый и многостадийный процесс, который начинается с нижних структурных уровней путем накопления несплошностей и микротрещин. По мере того, как исчерпываются способности деформирования на данном структурном уровне, в процесс вовлекаются структуры более высокого уровня. Макро разрушение в заданном объеме происходит в результате того, что материал этого объема исчерпал способности к деформированию на всех структурных уровнях, вплоть до макроскопического. Важно подчеркнуть, что структурные неоднородности данного структурного уровня деформируются самосогласованным образом.

Взаимодействие структурных нарушений может приводить к коллективным эффектам – это наблюдалось в экспериментах по исследованию напряженных плоских оптически активных сред при различных плотностях структурных нарушений  $\nu$  [8]. При достаточно высокой плотности разрезов их совокупность приобретала коллективные свойства и начинала создавать общее поле на характерных расстояниях всего скопления.

Исследования акустической эмиссии при лабораторном деформировании образцов горных пород, позволившие проанализировать процесс формирования очага макроразрушения образца, показывают (см., например, [9]), что в процессе подготовки разрушения образца можно выделить три стадии. На первой стадии, под действием медленно возрастающих напряжений, происходит более-менее равномерно распределенное по пространству (диффузионное) накопление трещин в рассматриваемом объеме горных пород  $\Omega$  и постепенное увеличение размеров этих трещин. После того, как в некоторой, относительно небольшой области  $\Omega_S \subset \Omega$ , плотность накопленных трещин достигает критического (для данного состава горных пород) значения  $\nu_c$ , состояние среды переходит во вторую стадию. На этой стадии происходит относительная локализация процесса накопления мелких разрывов в области будущего макроразрыва и последующая кластеризация и укрупнение этих разрывов. Наконец, на третьей стадии начинает развиваться процесс неустойчивой деформации в узкой области образующегося макроразрыва. Предполагая, что процесс формирования области макроразрыва в этих экспериментах качественно аналогичен процессу формирования очага землетрясения, будем ассоциировать вторую стадию с процессом формирования потенциального очага землетрясения, а область  $\Omega_S$  – с областью потенциального очага землетрясения. Главной физической особенностью области потенциального очага  $\Omega_S$  мы считаем то, что в этой

области взаимодействие трещин приводит, при прочих равных условиях, к увеличению вероятности развития трещиноватости среды по сравнению с вероятностью ее развития в случае случайного процесса, т.е. в этой области идет процесс самоорганизации разрушения. Переход системы к самоорганизации часто удается описать с помощью подхода, использованного при построении феноменологической теории фазовых переходов второго рода. Ниже мы будем следовать основным принципам этого подхода.

### 1. Исходные предположения

Напомним основные положения феноменологической теории фазовых переходов второго рода [10]. Примером фазового перехода второго рода является переход одной кристаллической модификации в другую, связанный с изменением упорядоченности кристалла. Степень упорядоченности кристалла (параметр порядка)  $\eta$  равняется нулю в неупорядоченной (симметричной) фазе, и отлична от нуля в разной степени упорядоченных кристаллах (в несимметричной фазе). При повышении температуры  $T$  (давление  $P$  считаем постоянным), степень упорядоченности обращается в нуль непрерывным образом для случая фазового перехода второго рода. Феноменологическая теория фазового перехода второго рода исходит из предположения, что свободная энергия  $F$  системы при малых значениях параметра порядка  $\eta$  имеет вид

$$F(P, T, \eta) = F_0(P, T) + A(P, T)\eta^2 + C(P, T)\eta^4, \quad (1)$$

где  $A > 0$  в симметричной фазе,  $A < 0$  в несимметричной фазе и  $C > 0$  в обеих фазах в окрестности точки фазового перехода. Если рассматривать фазовый переход при заданных значениях давления, то вблизи точки фазового перехода  $T_c$  можно записать  $A(T) = a(T - T_c)$ , а коэффициент  $C$  положить равным постоянной  $C(T_c)$ .

В рассматриваемой нами задаче стадию накопления случайно ориентированных трещин естественно ассоциировать с симметричной фазой, а стадию формирования потенциального очага – с несимметричной фазой. При этом, поскольку мы считаем, что формирование потенциального очага в области  $\Omega_S$  связано с превышением в этой области плотности трещин некоторого критического предела, естественно рассматривать в качестве аналога  $T^{-1}$  некий безразмерный параметр  $0 \leq \alpha \leq 1$ , характеризующий степень разрушения среды, так что  $\alpha = 0$  соответствует сплошной упругой среде,  $\alpha = 1$  соответствует полностью разрушенной среде. Величина  $\alpha_{cr}$ , при превышении которой начинается процесс самоорганизации разрушения и формирование потенциального

очага, является аналогом  $T_c^{-1}$ . В качестве аналога параметра порядка  $\eta$  будем рассматривать безразмерный параметр  $0 \leq \varphi \leq 1$ , характеризующий степень влияния взаимодействия трещин на процесс разрушения. Случай  $\varphi(x) = 0$ ,  $x \in \Omega$  соответствует отсутствию в области  $\Omega$  взаимодействия между трещинами, сколько-нибудь существенно влияющего на процесс трещинообразования ( $\alpha(x) < \alpha_{cr}$ ), а  $\varphi(x) \neq 0$ ,  $x \in \Omega_S$  отвечает проявлению самоорганизации в процессе трещинообразования в области  $\Omega_S$ . По порядку величины  $\varphi = V_{\Omega_S}/V$ , где  $V_{\Omega_S}$  – объем области  $\Omega_S$  (объем потенциального очага), а  $V$  – объем реального очага землетрясения [2].

Будем рассматривать только начальный процесс формирования потенциального очага. На этом этапе, при достаточно медленном нагружении, процесс накопления трещин можно описывать, считая, что остальные параметры среды имеют квазиравновесные значения. Это условие нарушается, когда потенциальный очаг переходит в стадию формирования макроразрыва. Отметим, что появление потенциального очага не обязательно приводит к землетрясению. В случае изменения внешних условий – например, перераспределения тектонических напряжений в результате землетрясения, произошедшего в соседней области – процесс развития потенциального очага может приостановиться.

## 2. Формулировка динамических уравнений

Для описания первой (дисперсной) стадии процесса разрушения будем исходить из следующего выражения для плотности свободной энергии среды [11]:

$$F_e = F_0 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\lambda(\alpha)}{2} I_1^2 + \mu(\alpha) I_2 - \gamma(\alpha) I_1 \sqrt{I_2} \right). \quad (2a)$$

Здесь  $I_1 = \sum_i \varepsilon_{ii}$  и  $I_2 = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$  – соответственно, первый и второй инварианты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ ;  $\rho$  – плотность среды (в дальнейшем плотность  $\rho$  будем считать равной единице);

$$\lambda(\alpha) = \lambda_0 - \alpha \lambda_r, \quad \mu(\alpha) = \mu_0 - \alpha \mu_r, \quad \gamma(\alpha) = \alpha \gamma_r, \quad (2b)$$

где  $\lambda_0, \mu_0$  – модули упругости неразрушенного материала, константы  $\lambda_r, \mu_r, \gamma_r$  – параметры среды, характеризующие вклад структурных нарушений в ее упругие свойства.

Температуру  $T$  в дальнейшем будем считать постоянной. Включение в выражение для свободной энергии члена  $I_1 \sqrt{I_2}$  приводит к тому, что эффективные модули упругости зависят от вида напряженного состояния и могут резко меняться при переходе от растяжения к сжатию.

Выражение (2), в несколько иных обозначениях, было впервые предложено в работе [12] для описания вязкоупругой среды с микронарушениями. Важно отметить, что в этой работе обоснование необходимости включения члена  $I_1\sqrt{I_2}$  в выражение для свободной энергии дается в предположении, что взаимодействием микронарушений можно пренебречь. Естественно, что при этом рассматриваются характеристики среды, осредненные на определенном пространственном масштабе, при котором имеет смысл говорить о трещиноватой среде как о квазинепрерывной, и на временном масштабе, при котором процесс развития трещиноватости можно рассматривать как гладкий процесс без “всплесков”, связанных с эволюцией отдельной трещины. В дальнейшем мы будем работать в рамках такого осреднения.

Чтобы учесть эффект самосогласованного развития системы трещин при переходе к стадии формирования потенциального очага, мы (как это обсуждалось в разд. 1) вводим в рассмотрение дополнительную обобщенную переменную (параметр порядка)  $0 \leq \varphi \leq 1$ . При этом равновесное значение  $\varphi_0$  параметра  $\varphi$  отлично от нуля только в случае, когда  $\alpha > \alpha_{cr}$  (т.е. в области  $\Omega_S$  потенциального очага землетрясения). Будем рассматривать модель, в которой плотность свободной энергии среды имеет вид

$$F(\varepsilon_{ij}, \alpha, \varphi) = F_e(\varepsilon_{ij}, \alpha) + F_i(\varepsilon_{ij}, \alpha, \varphi), \quad (3)$$

где

$$F_i(\varepsilon_{ij}, \alpha, \varphi) = A(\varepsilon_{ij}, \alpha)\varphi^2 + B(\varepsilon_{ij}, \alpha)\varphi^3 + C(\varepsilon_{ij}, \alpha)\varphi^4. \quad (4)$$

На начальной стадии формирования потенциального очага параметр  $\varphi \ll 1$  и выражение (4) можно рассматривать, как разложение функции  $F_i(\varepsilon_{ij}, \alpha, \varphi)$  в ряд по  $\varphi$ . (Заметим, что коль скоро нас будет интересовать случай, когда минимум  $F_i(\varepsilon_{ij}, \alpha, \varphi)$  достигается в точке  $\varphi = \varphi_0 \neq 0$ , мы должны учитывать в разложении (4) члены до четвертого порядка по  $\varphi$  даже, когда  $\varphi \ll 1$ .) Линейный член по  $\varphi$  в (4) отсутствует, так как он приводит к нарушению условия, что при любом необратимом изотермическом процессе при постоянном объеме  $dF/dt < 0$ .

Считая, что мы находимся в условиях, при которых динамику параметра  $\alpha$  можно рассматривать при квазиравновесных значениях тензора напряжений  $\sigma_{ik}$  и параметра  $\varphi$ , временная эволюция разрушения описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}(x, t) = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \varphi} = [2A(\varepsilon, \alpha) + 3B(\varepsilon, \alpha)\varphi + 4C(\varepsilon, \alpha)\varphi^2]\varphi = 0, \quad (5б)$$

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dt} = \begin{cases} -\varkappa_\alpha \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} & \text{при } \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \leq 0 \\ 0 & \text{при } \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} > 0, \end{cases} \quad (5в)$$

где  $\varkappa_\alpha > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} = & - \left( \frac{\lambda_r}{2} I_1^2 + \mu_r I_2 + \gamma_r I_1 \sqrt{I_2} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial A(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi^2 + \frac{\partial B(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi^3 + \frac{\partial C(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi^4 \right), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) = & \left. \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}(x,t), \alpha=\alpha(x,t), \varphi=\varphi(x,t)} = \\ = & \left( \lambda_0 - \alpha \lambda_r - \alpha \gamma_r \frac{1}{\xi} \right) I_1 \delta_{ij} + (2(\mu_0 - \alpha \mu_r) - \alpha \gamma_r \xi) \varepsilon_{ij} + \\ & + \left( \frac{\partial A(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varphi^2 + \frac{\partial B(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varphi^3 + \frac{\partial C(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varphi^4 \right). \end{aligned} \quad (6б)$$

Здесь  $\xi = \frac{I_1}{\sqrt{I_2}}$  характеризует тип деформации. (Более подробно о связи параметра  $\xi$  с типом деформации см. [11].) Условие  $d\alpha(x, t)/dt \geq 0$  означает, что в данной модели не учитывается процесс залечивания трещин. Систему уравнений (5) следует, естественно, дополнить начальными и граничными условиями, которые мы пока не конкретизируем.

Нетрудно понять, что при фиксированных остальных переменных равновесное значение параметра  $\varphi$  (т.е. решение уравнения  $\partial/\partial\varphi = 0$  при условии, что  $\partial^2 F/\partial\varphi^2 > 0$ ) отлично от нуля, только если коэффициенты  $A < 0$ ,  $B \geq 0$  и  $C > 0$ . Для простоты дальнейших формул, будем рассматривать модель, в которой коэффициент  $B = 0$ .

Условие, что равновесное значение параметр порядка  $\varphi$  отлично от нуля только в области  $\alpha > \alpha_{cr}$ , означает: в окрестности точки  $\alpha_{cr}$

$$A(\varepsilon_{ij}, \alpha) = a(I_1, I_2)(\alpha_{cr} - \alpha), \quad (7a)$$

где  $a(I_1, I_2) > 0$ , и

$$C(\varepsilon_{ij}, \alpha) = c(I_1, I_2), \quad (76)$$

где  $c(I_1, I_2) > 0$ .

Таким образом, в случае, когда  $F_i(\varepsilon, \alpha, \varphi)$  задается формулами (4) и (7), в области, где  $\alpha(x) < \alpha_{cr}$ , система уравнений (5) описывает процесс развития трещиноватости согласно модели (2), а в области, где  $\alpha(x) \geq \alpha_{cr}$  согласно уравнениям (5), в процесс разрушения дает вклад эффект взаимодействия трещин, т.е. в этой области идет формирование потенциального очага. Оставаясь в рамках предположения о малости деформаций, будем считать, что

$$a(I_1, I_2) = \frac{a_1}{2} I_1^2 + a_2 I_2, \quad (8a)$$

$$c(I_1, I_2) = \frac{c_1}{2} I_1^2 + c_2 I_2. \quad (86)$$

При этом, поскольку  $I_1^2$  и  $I_2$  – независимы и положительны, из условий  $a(I_1, I_2) > 0$  и  $c(I_1, I_2) > 0$  следует, что коэффициенты  $a_1, a_2, c_1, c_2$  также не отрицательны. Наложим на эти коэффициенты еще одно условие, которое будет использовано ниже, а именно, будем считать, что  $c_2/2c_1 \leq a_2/a_1 \leq 2c_2/c_1$ .

В заключение заметим, что, вообще говоря, величина  $\alpha_{cr}$  зависит от текущих значений параметров состояния среды и может также зависеть от скорости нагружения. Для целей данной работы эти эффекты не существенны и  $\alpha_{cr}$  будем считать константой.

### 3. Некоторые следствия модели

Условие выпуклости функционала  $F$

$$\frac{\partial^2 F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} > 0 \quad (9)$$

обеспечивает единственность и устойчивость решения статической задачи деформирования [13]. В работе [11] условие потери выпуклости функционала упругой энергии было исследовано в случае модели (2). В работе [14] это условие было проанализировано в случае модели (3) и доказано следующее утверждение.

Обозначим через  $\alpha_{cr}^{(e)}$  значение параметра  $\alpha$ , при превышении которого нарушается условие (9) в случае модели (2), а через  $\alpha_{cr}^{(i)} \geq \alpha_{cr}$  –



значение параметра  $\alpha$ , при превышении которого нарушается условие (9) в случае модели (3). Учет взаимодействия трещин приводит к тому, что  $\alpha_{cr}^{(i)} \leq \alpha_{cr}^{(e)}$ , по крайней мере в случае, когда  $\varphi^2 \leq \min(a_1/c_1, a_2/c_2) \times (\alpha_{cr}^{(i)} - \alpha_{cr})$ . Равновесное значение  $\varphi_0$  параметра  $\varphi$  (т.е. решение уравнения (56)) принадлежит этой области, если коэффициенты  $a_i$  и  $c_i$ , фигурирующие в (8), удовлетворяют условию  $c_2/2c_1 \leq a_2/a_1 \leq 2c_2/c_1$ .

Таким образом, учет взаимодействия трещин приводит к тому, что, при прочих равных условиях, потеря устойчивости системы происходит именно в области потенциального очага.

Для качественного понимания того, к чему приводит учет параметра  $\varphi$  при описании процесса формирования потенциального очага, рассмотрим одномерную модель, в которой координата  $x$  принадлежит отрезку  $[0,1]$ , к концам которого приложено медленно меняющееся напряжение  $\sigma_0(t)$ . В одномерном случае  $\xi = \pm 1$ . Ниже рассматривается случай  $\xi = 1$  (растяжение).

В силу уравнения (5а), напряжение  $\sigma$  в любой точке отрезка  $[0,1]$  равно  $\sigma_0(t)$ . Соответственно, из (5)–(8) следует, что, пренебрегая членами высших порядков по  $(\alpha - \alpha_{cr})$  получаем:

$$\sigma_0(t) = Q(x, t)\varepsilon(x, t) = Q(x, t)\frac{du(x, t)}{dx}, \quad (10)$$

где

$$Q(x, t) = E_0 - \alpha(x, t)E_r - \theta(\alpha(x, t) - \alpha_{cr})q_0(\alpha_{cr} - \alpha(x, t))^2,$$

$$E_0 = \lambda_0 + 2\mu_0, \quad E_r = 2\gamma_r + \lambda_r + 2\mu_r, \quad q_0 = \frac{(a_1 + 2a_2)^2}{4(c_1 + 2c_2)} > 0,$$

$$\theta(x) = 0 \quad \text{при } x < 0 \quad \text{и} \quad \theta(x) = 1 \quad \text{при } x \geq 0.$$

Таким образом, смещение

$$u(x, t) = \sigma_0(t) \int_0^x \frac{dy}{Q(y, t)}.$$

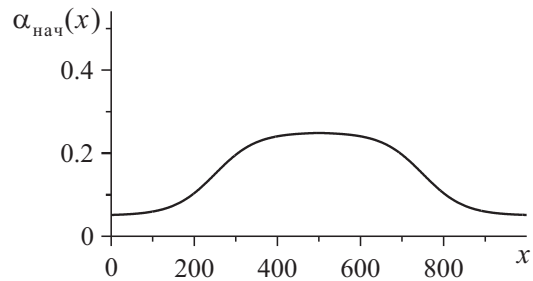
Уравнение (5в) в одномерном случае переписывается в следующем виде:

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dt} = \varkappa_\alpha \left[ \frac{E_r}{2} + \theta(\alpha(x, t) - \alpha_{cr})q_0(\alpha(x, t) - \alpha_{cr}) \right] \varepsilon^2(x, t). \quad (11)$$

Поскольку в одномерном случае при растяжении степень разрушения должна возрастать, константы  $\gamma_r$ ,  $\lambda_r$  и  $\mu_r$  должны удовлетворять условию  $E_r > 0$ .

Пример динамики формирования потенциального очага, полученный с помощью численного решения уравнений (10), (11), приведен на рис. 1, 2, 3.

Рис. 1. Начальное распределение параметра  $\alpha$



На рис. 1 приведено начальное распределение параметра  $\alpha(x)$ , при котором решалось уравнение (11). Размер области потенциального очага определяется как  $l(t) = x_r(t) - x_l(t)$ , где  $x_r(t)$  и  $x_l(t)$ , соответственно, правая и левая границы потенциального очага, т.е. решения уравнения  $\alpha(x, t) = \alpha_{cr}$ . Динамика увеличения размера потенциального очага приведена на рис. 2.

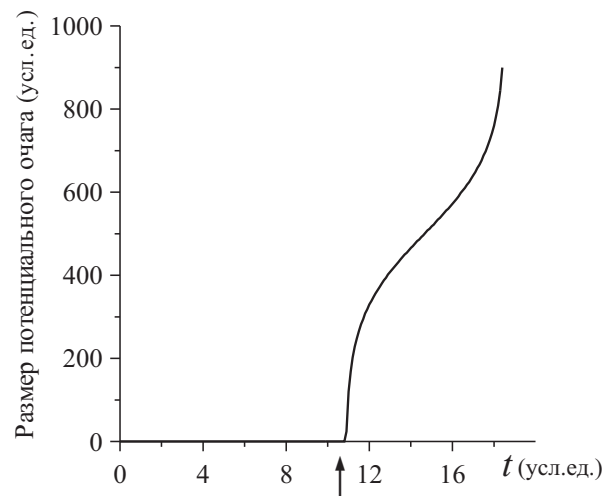
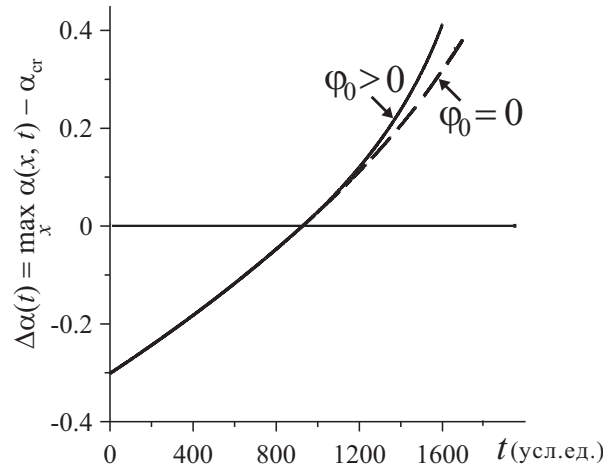


Рис. 2. Динамика увеличения размера потенциального очага. Стрелкой обозначен момент появления потенциального очага

На рис. 3 приведен график роста со временем отклонения  $\Delta\alpha(t)$  максимального значения параметра разрушения  $\alpha$  от величины  $\alpha_{cr}$ .



**Рис. 3.** Изменение со временем отклонения  $\Delta\alpha(t)$  от величины  $\alpha_{cr}$ . Пунктиром показано, как развивается величина  $\Delta\alpha(t)$  в случае, когда не учитывается эффект взаимодействия трещин в области  $\alpha > \alpha_{cr}$ , т. е. когда динамика параметра  $\alpha$  описывается в соответствии с моделью (2) во всей области его изменения

Из этого рисунка видно, что процесс разрушения ускоряется после того, как величина параметра  $\alpha$  превысила значение  $\alpha_{cr}$  и взаимодействие трещин начинает оказывать влияние на процесс разрушения.

#### 4. Обобщение на случай модели, зависящей от пространственных производных

Мы рассматриваем случай, когда свободная энергия системы  $F(x)$  зависит лишь от состояния полей  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\alpha$  и  $\varphi$  в бесконечно малой окрестности точки  $x$ . В классической теории поля такие системы называются локальными. Однако локальные системы допускают, что описывающий их функционал свободной энергии может зависеть не только от самих полей, но и от конечного числа их частных производных, взятых в точке  $x$ . Ясно, что члены с производными будут существенны в случае пространственно неоднородных систем. Появление потенциального очага приводит к нарушению пространственной однородности среды. Поэтому в рассматриваемой задаче представляется важным исследовать вопрос о том, к каким физическим следствиям приводит предположение, что свободная энергия системы может зависеть от пространственных производных параметров  $\alpha$  и  $\varphi$ . В работе [15] обобщение модели (2) на случай зависимости свободной энергии от частных производных параметра  $\alpha$  рассмотрено на основе общих термодинамических соотношений. Мы воспользуемся результатами этой работы для анализа

простейшего случая, когда в выражение (3) добавляются кинетические члены для параметров  $\alpha$  и  $\varphi$ :

$$F = F_\varepsilon(\varepsilon_{ij}, \alpha) + F_i(\varepsilon_{ij}, \alpha, \varphi) + \frac{D_\alpha}{2}(\nabla\alpha, \nabla\alpha) + \frac{D_\varphi}{2}(\nabla\varphi, \nabla\varphi). \quad (12)$$

Здесь ковариантная производная  $\nabla$  и скалярное произведение  $(,)$  определены по текущей метрике  $g_{ij}$ ,  $D_\alpha \geq 0$ ,  $D_\varphi \geq 0$ . Напомним, что тензор упругих деформаций может быть записан в виде  $\varepsilon_{ij} = g_{ij} - g_{ij}^0$ , где  $g_{ij}^0$  – метрический тензор в состоянии, когда напряжения равны нулю. (Будем считать, что изменения метрики  $g_{ij}^0$  со временем не происходит.) Это соотношение необходимо учитывать при вариации свободной энергии по тензору деформаций. Тензор напряжений в равновесных процессах записывается в рассматриваемом случае в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \left( \lambda_0 - \alpha\lambda_r - \alpha\gamma_r \frac{1}{\xi} \right) I_1 \delta_{ij} + (2(\mu_0 - \alpha\mu_r) - \alpha\gamma_r \xi) \varepsilon_{ij} + \\ & + \left( \frac{\partial A(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varphi^2 + \frac{\partial C(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varphi^4 \right) - \frac{D_\alpha}{2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{D_\varphi}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

а система уравнений (5) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{ik}(x, t) = 0, \quad (14a)$$

$$-D_\varphi \Delta \varphi + 2A(\varepsilon, \alpha) \varphi + 4C(\varepsilon, \alpha) \varphi^3 = 0, \quad (14б)$$

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dt} = \begin{cases} -\varkappa_\alpha \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} & \text{при } \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \leq 0 \\ 0 & \text{при } \frac{\partial F(\varepsilon, \alpha, \varphi)}{\partial \alpha} > 0, \end{cases} \quad (14в)$$

где  $\varkappa_\alpha > 0$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, t)}{\partial \alpha} = & - \left( \frac{\lambda_r}{2} I_1^2 + \mu_r I_2 + \gamma_r I_1 \sqrt{I_2} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial A(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi^2 + \frac{\partial C(\varepsilon, \alpha)}{\partial \alpha} \varphi^4 \right) - D_\alpha \Delta \alpha. \end{aligned} \quad (14г)$$

В случае одномерной модели (обсуждавшейся в разд.3) выражение (13) принимает вид

$$\sigma_0 = [E_0 - \alpha E_r + a(\alpha_{cr} - \alpha) \varphi_0^2 + c \varphi_0^4] \varepsilon - \frac{D_\alpha}{2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 - \frac{D_\varphi}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2,$$

где  $a = a_1 + 2a_2$  и  $c = c_1 + 2c_2$ .

Из этого выражения видно, что деформация

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0 + \frac{D_\alpha}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \frac{D_\varphi}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2}{[E_0 - \alpha E_r + a(\alpha_{cr} - \alpha)\varphi_0^2 + c\varphi_0^4]} \quad (15)$$

отлична от нуля в случае, когда внешнее напряжение  $\sigma_0 = 0$ . Это дает основание интерпретировать  $\frac{D_\alpha}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \frac{D_\varphi}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2$  как внутреннее напряжение, вызванное неоднородностью разрушения среды.

## 5. Обсуждение результатов

Прежде всего, обсудим случай, когда свободная энергия не зависит от пространственных производных входящих в нее параметров. Учет взаимодействия трещин в такой модели приводит к двум важным результатам.

Во-первых, учет взаимодействия трещин позволяет ввести понятие потенциального очага землетрясения как области, в которой равновесное значение параметра  $\varphi$ , отвечающего за степень самоорганизации процесса трещинообразования, отлично от нуля. Формально, пространственная граница  $S$  области потенциального очага землетрясения (при пространственно осредненном описании системы) определяется как поверхность, при переходе через которую величина  $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}|_{\varphi=0}$  меняет знак [2]. Физически, в рамках предлагаемой модели, область потенциального очага характеризуется более интенсивным, по сравнению с окружающей средой, процессом ее разрушения. Это согласуется с результатами лабораторных экспериментов по разрушению горных пород, которые показывают, что формированию макроразрыва предшествует относительная локализация процесса накопления мелких разрывов в области будущего макроразрыва и последующая кластеризация и укрупнение этих разрывов.

Во-вторых, учет взаимодействия трещин приводит к тому, что система теряет устойчивость при величине параметра разрушения  $\alpha$  меньшей, чем в случае модели, основанной на выражении для свободной энергии (2), в которой влияние взаимодействия трещин на процесс разрушения не учитывается. Иными словами, если (гипотетически) рассматривать величину параметра  $\alpha$  как прогностический признак макроскопического разрушения (землетрясения) и объявлять тревогу при приближении величины  $\alpha$  к теоретическому порогу потери устойчивости, то прогноз, основанный на модели (2), может привести к пропуску цели. Физически этот эффект представляется естественным и то, что

он реализуется в рассматриваемой модели, говорит в ее пользу. Он служит также обоснованием для использования термина “потенциальный очаг”, так как именно эта область в первую очередь теряет устойчивость.

В заключение обсудим некоторые следствия учета пространственных производных от параметров  $\alpha$  и  $\varphi$ . Как отмечалось в конце разд. 4, выражение (15) дает основания интерпретировать  $D_\alpha(\frac{\partial\alpha}{\partial x})^2 + D_\varphi(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2$  как внутреннее напряжение, вызванное неоднородностью разрушения среды. Вероятно, разрушение керна, получаемого в процессе бурения скважин, которое иногда наблюдается через некоторое время после его разгрузки [16], связано с подобного рода внутренними напряжениями. Естественно думать, что аналогичный эффект может иметь место для потенциального очага землетрясения. В случае, когда  $D_\alpha$  – отличный от нуля постоянный коэффициент при  $\alpha < \alpha_{cr}$ , и  $\sigma_0 = 0$ , процесс разрушения в одномерной модели описывается уравнением

$$\frac{d\alpha(x, t)}{dt} = \varkappa_\alpha \left( D_\alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{E_r}{8} \frac{D_\alpha^2 (\frac{\partial \alpha}{\partial x})^4}{(E_0 - \alpha E_r)^2} \right).$$

Таким образом, по крайней мере в области, где функция  $\alpha(x)$  не выпукла, т.е.  $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \geq 0$ , появление в (12) слагаемого  $\frac{D_\alpha}{2}(\nabla\alpha, \nabla\alpha)$  приводит в одномерной модели к тому, что даже незначительное разрушение среды вызывает эффект “саморазрушения”. Хотя это – свойство именно одномерной модели, оно представляется неудовлетворительным. Для того, чтобы эффект “саморазрушения” был связан только с потенциальным очагом, можно, например, предположить, что  $D_\alpha = D_\alpha(\alpha)$ , причем,  $D_\alpha = 0$  при  $\alpha < (\alpha_{cr} - \delta\alpha)$ , и  $D_\alpha(\alpha)$  меняется от нуля до некоторого постоянного значения  $D_\alpha^{(0)}$  в области  $[\alpha_{cr} - \delta\alpha, \alpha_{cr}]$ . Величина  $\delta\alpha$  считается малой ( $\delta\alpha/\alpha_{cr} \ll 1$ ) и определяется прочностными свойствами среды и параметрами потенциального очага. При этом в правой части (14г) возникает дополнительное слагаемое  $-\frac{1}{2} \frac{\delta D_\alpha}{\delta \alpha} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \right)^2$ , дающее вклад в пограничном слое области потенциального очага, который определяется условием

$$\alpha_{cr} > \alpha(x) \geq \alpha_{cr} - \delta\alpha.$$

Другой возможный вариант состоит в том, чтобы вообще не вводить член  $\frac{D_\alpha}{2}(\nabla\alpha, \nabla\alpha)$  в (12), т.е. считать  $D_\alpha \equiv 0$ . При этом внутреннее напряжение определяется величиной  $\frac{D_\varphi}{2}(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2$ . Отметим, что в отличие от модели (3), в модели (12) равновесное значение параметра  $\varphi$  может быть отлично от нуля вне области  $\Omega_S$  потенциального очага. Задавая

соответствующие граничные условия на  $\varphi$ , можно, поэтому, учесть то обстоятельство, что, по аналогии с результатами экспериментов по исследованию напряженных плоских оптически активных сред [8], потенциальный очаг должен создавать поле напряжений в некоторой своей окрестности. Конфигурация этой окрестности и ее характерные размеры зависят, конечно, от свойств потенциального очага, в частности от его геометрии.

### Выводы

Рассмотрена динамическая модель формирования потенциального очага землетрясения. Последний определяется как область  $\Omega_S$ , в которой плотность трещин настолько велика, что взаимодействие трещин приводит к самоорганизации процесса разрушения. Для формального описания модели формирования потенциального очага, в дополнение к обобщенной переменной  $\alpha$ , характеризующей степень разрушения среды [11, 12], введена в рассмотрение обобщенная переменная  $\varphi \geq 0$ , отвечающая за степень самоорганизации процесса разрушения. Учет эффекта самоорганизации разрушения среды проводится по аналогии с феноменологической теорией фазовых переходов. Проанализирован случай достаточно медленного нагружения, при котором динамика развития трещиноватости среды может рассматриваться при квазиравновесных значениях тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  и параметра  $\varphi$ .

Самоорганизация процесса разрушения приводит к тому, что система должна терять устойчивость в первую очередь в области  $\Omega_S$ , в которой равновесное значение  $\varphi_0$  параметра  $\varphi$  отлично от нуля. Это является основанием для ассоциации пространственной области, в которой  $\alpha > \alpha_{cr}$ , с областью потенциального очага землетрясения. Пример одномерной модели показывает, что учет взаимодействия трещин приводит к ускорению процесса трещинообразования в области  $\Omega_S$ .

Обсуждены некоторые аспекты обобщения модели в случае, когда существенна пространственная неоднородность разрушения среды. Показано, в частности, что введение в рассмотрение кинетических членов для параметров  $\alpha$  и  $\varphi$  приводит к учету внутренних напряжений, возникающих в среде благодаря пространственной неоднородности ее разрушения. При этом, появляется также возможность описать поле напряжений, которое потенциальный очаг должен создавать в некоторой своей окрестности.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В.А. Ляховскому и Г.А. Соболеву за полезные обсуждения и О.Д. Воеводе за замечания на стадии рецензирования статьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-05-64016а РФФИ) и гранта по Научным Школам (НШ -1270.2003.5).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тюпкин Ю.С. Закон Омори и кинетика афтершоковой последовательности // Физика Земли. 2001. N 9. С.41–48.
2. Тюпкин Ю.С. Потенциальный очаг землетрясения // Физика Земли. 2002. N 8. С.50–56.
3. Мячкин В.И., Костров Б.В., Соболев Г.А., Шамина О.Г. Основы физики очага и предвестники землетрясения // Физика очага землетрясения. М.: Наука, 1975. С.6–29.
4. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. О зависимости времени подготовки землетрясения от его энергии // ДАН СССР. 1983. Т.271, N 2. С.328–330.
5. Структурные уровни пластической деформации и разрушения / Под ред. В.Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1990. 220 с.
6. Панин В.Е., Панин С.В., Мамаев А.И. Деформационные домены на мезоуровне в деформируемом твердом теле // ДАН СССР. 1996. Т.350, N 1. С.35–38.
7. Попов В.Л., Панин В.Е. Фрактальный характер и масштабная инвариантность дисклинационной структуры деформируемого твердого тела // ДАН СССР. 1997. Т.353, N 1. С.51–53.
8. Осокина Д.И., Мячкин В.И. и др. Изучение локального поля напряжений – аналога очаговой зоны // Физические процессы в очаге землетрясения. М.: Наука, 1980. С.68–78.
9. Соболев Г.А., Пономарев А.В. Физика землетрясений и предвестники. М.: Наука, 2003. 270 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1987. 567 с.
11. Lyakhovskiy V.A., Ben-Zion Y., Agnon A. Distributed damage, faulting, and friction // J. Geophys. Res. 1997. Vol.102. P.27635–27649.
12. Ляховский В.А., Мясников В.П. О поведении упругой среды с микронарушениями // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. N 10. С.71–75.
13. Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures, elastic, inelastic, fracture and damage theories. N-Y: Oxford Univ. Press, 1991. 984 p.
14. Тюпкин Ю.С. Динамика формирования потенциального очага землетрясения // Физика Земли. 2004. N 3 (в печати).
15. Мясников В.П., Ляховский В.А., Подладчиков Ю.Ю. Нелокальная модель разномодульного вязкоупругого тела // ДАН СССР. 1990. Т.312, N 2. С.302–305.
16. Кольская сверхглубокая / Под ред. Е.А. Козловского. М.: Недра, 1984. 490 с.