

УДК 552.153

ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕФОРМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ТРЕЩИНОВАТОГО ОБРАЗЦА ГОРНОЙ ПОРОДЫ

О.Д. ВОЕВОДА, О.Ю. САВЕНКО

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Предложен способ построения определяющих уравнений для статически нагружаемого образца горной породы с разрывами сплошности. Определены наблюдаемые коэффициенты деформации образца и исследована зависимость указанных коэффициентов от параметров трещиноватости и видов нагружения.

THE EFFECTIVE ELASTIC MODULUS OF THE CRACKED ROCKS

O.D. VOEVODA, O.Yu. SAVENKO

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The method to obtain the constitution law of cracked rock was described in this paper. Suggested method permits correctly introduce the effective modulus of the rock and to investigate it's dependence on cracks parameters.

Введение

Исследования деформационных свойств образцов горных пород представляют интерес для многих вопросов геофизики, связанных как с собственно механикой горных пород, так и с анализом состояния вещества в условиях земных недр.

Основная информация об указанных свойствах извлекается из экспериментов по квазистатическому деформированию образцов горных пород. При этом в обязательном порядке подвергается анализу зависимость относительных изменений размеров образца от приложенных к нему нагрузок. Экспериментально показано, что существенные черты

этой зависимости определяются закономерностями возникновения и развития разрывов сплошности (трещин) в материале образца [1]. Поэтому, для корректной интерпретации экспериментальных результатов необходимы теоретические исследования влияния разрывов на деформационные свойства горных пород. Ввиду сложности строения при теоретическом описании деформационных свойств горных пород целесообразно пользоваться их средними или, как их называют, "эффективными" характеристиками. В этом направлении в рамках статической теории упругости первые результаты, по-видимому, были получены Дж. Волшем [2–4]. Затем эти результаты были развиты и обобщены Р.Л. Салгаником [5], Б. Будянским и Р.О'Коннелом [6]. Работы [7–14] являются детализацией отмеченных выше работ. В работах [15–19] эффективные характеристики деформационных свойств предложено находить из длинноволновой асимптотики соответствующей задачи динамической теории упругости.

В статьях [5] и [6] рассмотрена квазистатически деформируемая линейно-упругая среда с большим числом трещин, которые равномерно распределены по ее объему. Предполагается, что в этом случае среда может быть представлена совокупностью равноправных объемов, каждый из которых полностью характеризует свойства всей среды. При этом каждый элементарный объем должен содержать "достаточно много трещин для того, чтобы состояние среды могло быть описано средними по этим объемам напряжениями и деформациями" (см. [5, с.149]).

Таким образом, состояние элементарного объема предложено описывать средними тензорами напряжений и деформаций, которые по определению связаны между собой тензором эффективных коэффициентов деформации. При определении этого тензора применены формальные методы, развитые Дж. Эшелби [20] и Е. Кренером [21] в континуальной теории дефектов.

Первый метод определения эффективных коэффициентов деформации основан на вычислении энергии элементарного объема тела с трещинами. Вторая производная энергии по компонентам напряжений или деформаций в [5] отождествлена, соответственно, с компонентами тензора эффективных коэффициентов податливости или жесткости. Такое определение указанных тензоров справедливо только в тех случаях, когда энергия тела с трещинами не зависит от процесса, приведшего тело в данное напряженно-деформированное состояние.

Второй, менее ограниченный метод основан на формальном представлении тензора полной деформации элементарного объема с трещинами в виде суммы тензора средней деформации его материала и тензора некоторых "неупругих" деформаций. Последние связаны со скачками пе-

ремещений на поверхностях трещин, которые, в свою очередь, зависят от напряженного состояния тела. В статье [5] это обстоятельство использовано для определения тензора эффективных коэффициентов податливости.

Необходимо отметить, что наличие неупругих деформаций может быть установлено только после разгрузки деформируемого образца. Это значит, что в каждом конкретном случае необходимо обосновать возможность представления полных деформаций нагружаемого тела в виде суммы средних деформаций его материала и некоторых неупругих деформаций.

Предложенные в работах [5] и [6] способы определения эффективных коэффициентов деформации, в принципе, позволяют обойти значительные трудности, которые возникают при локальном описании напряженно-деформированного состояния столь сложного объекта как горная порода. Однако из изложенного выше следует определенная логическая непоследовательность в определении эффективных коэффициентов деформации трещиноватого тела. Эта непоследовательность обусловлена отсутствием точного определения основного объекта теории – “элементарного объема” тела с разрывами сплошности.

Целью настоящей статьи является описание такого способа определения эффективных коэффициентов деформации, при котором не используется понятие “элементарный объем” тела с разрывами. Усреднение соответствующих величин явно производится по всему объему, занятому материалом тела конечных размеров. Такой подход позволил получить физически содержательную связь между относительным измерением размеров тела и действующими на его внешнюю поверхность нагрузками.

Определяющие уравнения и наблюдаемые коэффициенты деформации тела с разрывами сплошности

Рассмотрим способ построения определяющих уравнений квазистатически деформируемого тела, в линейно-упругом однородном изотропном материале которого содержатся разрывы сплошности (рис. 1). Это тело будем считать моделью образца горной породы.

Пусть на внешней поверхности находящегося в равновесии тела (или ее части) задан вектор напряжений и определен вектор перемещений. Деформации материала тела связаны с напряжениями законом Гука. На поверхностях разрывов $\nu = 1, 2, \dots, N$, вектор напряжений непрерывен, а вектор перемещений имеет скачки. Объем недеформированного тела совпадает с объемом V его материала.

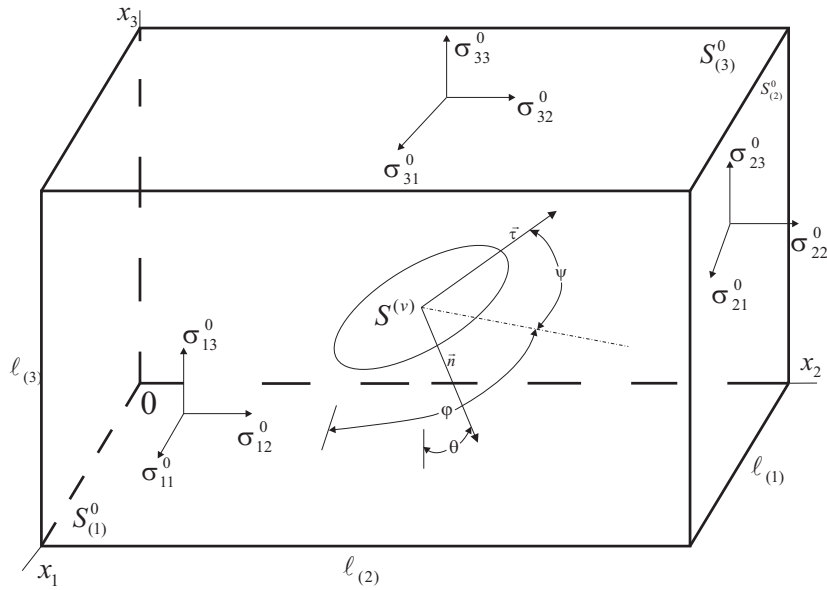


Рис. 1. Образец с трещинами

В декартовой системе координат $(0, x_1, x_2, x_3)$ сформулированным условиям деформирования принятой модели образца горной породы соответствуют следующие соотношения [22]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ik,k} &= 0, \\
 \varepsilon_{kl} &= s_{ijkl}\sigma_{ij}, \\
 \sigma_{ij}n_j &= \sigma_{ij}^0n_j^0, \quad u_i = u_i^0 \quad \text{на } S^0 \text{ или ее части,} \\
 [\sigma_{ij}n_j]^{(\nu)} &= 0, \quad [u_i]^{(\nu)} = b_i^{(\nu)} \quad \text{на } S^{(\nu)}, \\
 s_{ijkl} &= \frac{1}{4\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

В формулах (1) $\sigma_{ik} = (\sigma_{ik} + \sigma_{ki})/2$; $\varepsilon_{kl} = (\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{lk})/2$; u_i , b_i , n_j^0 и $n_j^{(\nu)}$ есть, соответственно, компоненты напряжений, деформаций материала тела, перемещений, их скачков и единичных векторов нормали к S^0 и $S^{(\nu)}$; s_{ijkl} – компоненты тензора коэффициентов податливости материала тела; λ и μ – коэффициенты Ламе; $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Положительной считается нормаль к области, занятой материалом тела. Квадратные скобки обозначают скачок заключенной в них величины, а запятая – частную производную по соответствующей координате.

При заданных условиях (1) найдем определяющие уравнения для тела с разрывами. Определяющими уравнениями деформируемого тела с разрывами будем называть связь напряжений, действующих на внешнюю поверхность тела (или ее часть), с изменением внешних (наблюдаемых) размеров тела.

Обозначим через $\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV$ и $\langle \varepsilon_{kl} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{kl} dV$ средние по объему V материала компоненты напряжений и деформаций, соответственно. Преобразуем $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ аналогично тому, как это делается в случае сплошного тела [22, 23]. С учетом граничных условий на поверхностях разрывов такое преобразование позволяет представить $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ в виде:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{2V} \int_{S^0} (\sigma_{im} x_j + \sigma_{jm} x_i) n_m dS, \\ \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= I_{kl} + E_{kl}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} I_{kl} &= \frac{1}{2V} \sum_{\nu=1}^N \int_{S^{(\nu)}} (b_k n_l + b_l n_k) dS, \\ E_{kl} &= \frac{1}{2V} \int_{S^0} (u_k n_l + u_l n_k) dS. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) x_i есть координаты точек на S^0 , $m = 1, 2, 3$. Компоненты тензоров внутренних I_{kl} и наблюдаемых внешних E_{kl} деформаций есть, соответственно, кинематические характеристики совокупности разрывов и внешней поверхности деформируемого тела.

В силу однородности материала тела между ε_{kl} и σ_{kl} имеет место следующая связь: $\langle \varepsilon_{kl} \rangle = s_{ijkl} \langle \sigma_{ij} \rangle$. Пусть зависимость I_{kl} от $\langle \sigma_{ij} \rangle$ можно представить в виде $I_{kl} = T_{ijkl} \langle \sigma_{ij} \rangle$, где T_{ijkl} – некоторый оператор-тензор. Конкретный вид оператора T_{ijkl} зависит от физической природы разрывов, их конфигурации и взаимного расположения внутри деформируемого тела заданной геометрии. С учетом связи между $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ и $\langle \sigma_{ij} \rangle$, приведенные выше формулы позволяют получить следующую связь между средними по объему материала тела с разрывами напряжениями и наблюдаемыми деформациями:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{kl} \rangle &= S_{ijkl} \langle \sigma_{ij} \rangle, \\ S_{ijkl} &= s_{ijkl} - T_{ijkl}. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое из соотношений (4) можно рассматривать как определяющие уравнения тела с разрывами сплошности. Второе из соотношений (4), по существу, есть определение тензора наблюдаемых (эффективных) коэффициентов податливости тела с разрывами. При отсутствии разрывов наблюдаемые коэффициенты податливости совпадают с коэффициентами податливости материала тела.

В отличие от работ, перечисленных во Введении, при построении определяющих уравнений (4) не использовалось понятие “элементарный объем” тела с разрывами. Такая постановка вопроса позволила исключить неопределенность в выборе величины “элементарного объема” и ввести явную операцию усреднения напряжений и деформаций по всему объему материала тела. В свою очередь, это привело к физически содержательной связи входящих в определяющие уравнения величин с экспериментально измеряемыми внешними нагрузками и изменением внешних (наблюдаемых) размеров деформируемого тела.

Действительно, пусть тело представляет собой прямоугольную призму, ребра которой направлены вдоль соответствующих координатных осей (см. рис. 1). В недеформированном состоянии размеры призмы вдоль соответствующих координатных осей $\{0, x_i\}$ равны $l_{(i)}$. Объем призмы $V = l_{(i)}l_{(j)}l_{(k)} = S_{(m)}l_{(m)}$, где $i \neq j \neq k$ (по заключенным в скобки индексам суммирование не производится). Пусть внешние напряжения однородны на соответствующих гранях призмы. В этом случае средние напряжения и деформации (2) определяются, соответственно, следующими формулами:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\sigma_{im} n_m \frac{l_j}{l_{(m)}} + \sigma_{jm} n_m \frac{l_i}{l_{(m)}} \right), \\ E_{kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_k^{(l)} n_l^0}{l_{(l)}} + \frac{\bar{u}_l^{(l)} n_k^0}{l_{(k)}} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Черта сверху символа обозначает операцию усреднения величины по площади соответствующей грани призмы. Формулы (5) с очевидностью показывают целесообразность интерпретации $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и E_{kl} как внешних напряжений и наблюдаемых деформаций.

Необходимо отметить, что внешние напряжения и наблюдаемые деформации представляют собой величины, которые зависят от геометрии деформируемого тела. Это значит, что одинаковые внешние нагрузки, действующие на два тела, которые отличаются друг от друга только своей формой, могут вызывать разные наблюдаемые деформации. Последнее обстоятельство необходимо учитывать при сравнении характеристик деформационных свойств горной породы, которые определены на образцах различной конфигурации.

Наблюдаемые коэффициенты деформации тела с трещинами

Исследуем качественно влияние плоских трещин с круговыми контурами на коэффициенты деформации кубического образца из линейно-упругого однородного изотропного материала. Рассмотрение образца в виде куба обладает наибольшей наглядностью и позволяет легко интерпретировать физический смысл различных компонент тензора наблюдаемых (эффективных) коэффициентов податливости.

Заметим, что трещины не взаимодействуют друг с другом и с внешней поверхностью образца, а его конечные размеры не влияют на распределение напряжений внутри образца. Пусть взаимное перемещение противоположных сторон поверхностей трещин возможно при любых отличных от нуля внешних нагрузках. Это означает отсутствие трения между противоположными сторонами поверхностей трещин.

В рамках принятых предположений для определения S_{ilki} можно использовать решение известной задачи об изолированной дискообразной трещине, находящейся в упругом однородном изотропном пространстве с заданными на бесконечности однородными напряжениями [24]:

$$b_k = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\pi\mu} \left(\frac{\text{sgn}}{\lambda + \mu} + \frac{1}{3\lambda + 4\mu} \right) \sqrt{r_0^2 - r^2} \sigma_{kj} n_j, \quad (6)$$

$$\text{sgn}(\sigma_{ij} n_i n_j) = \begin{cases} -1 & \text{при } \sigma_{ij} n_i n_j \geq 0 \\ 0 & \text{при } \sigma_{ij} n_i n_j < 0 \end{cases}.$$

Здесь b_k – скачок перемещений на плоскости трещины, r_0 – радиус трещины, r – расстояние от центра трещины до некоторой точки на ее плоскости, n_i – компоненты единичной нормали к $S^{(\nu)}$, σ_{ij} – напряжения, действующие в сплошной нагруженной призме на месте трещины, sgn – знаковая функция. Раскрытой трещине соответствует $\sigma_{ij} n_i n_j \geq 0$ или $\text{sgn} = -1$, закрытой трещине соответствует $\sigma_{ij} n_i n_j < 0$ или $\text{sgn} = 0$ на $S^{(\nu)}$.

Компоненты вектора \vec{n} удобно выразить через углы Эйлера [25]:

$$n_1 = \sin \varphi \sin \theta, \quad n_2 = -\cos \varphi \sin \theta, \quad n_3 = \cos \theta. \quad (7)$$

Углы $\theta \in [0, 2\pi]$ и $\varphi \in [0, \pi]$ определяют ориентацию плоскости трещины относительно граней образца.

Используя приведенные выше формулы, получим:

$$S_{ijkl} = \frac{1}{4\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{3\mu} \frac{1}{V} \sum_{\nu=1}^N \left[\left(\frac{\text{sgn}}{\lambda + \mu} + \frac{1}{3\lambda + 4\mu} \right) r_0^3 (\delta_{ik}n_jn_l + \delta_{il}n_jn_k) \right]. \quad (8)$$

Анализ формулы (8) показывает, что образец, в линейно-упругом однородном изотропном материале которого находится фиксированное число трещин неизменного радиуса, ведет себя в целом как линейно-упругое анизотропное тело разносопротивляющееся растяжению и сжатию. Если в процессе нагружения изменяются число трещин и (или) их характеристики, то рассматриваемый образец будет вести себя как нелинейно-упругое тело. Разгрузка образца будет происходить по линейной зависимости внешних деформаций от внешних напряжений. Поскольку отсутствует трение между противоположными сторонами поверхностей трещин, то после разгрузки (внешние напряжения равны нулю) остаточных деформаций не будет.

Более конкретные заключения о деформационных свойствах образца получим для коллинеарных трещин. В этом случае суммирование распространяется только на радиусы трещин, а формула (8) принимает вид

$$S_{ijkl} = \frac{1}{4\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{3\mu} C \left(\frac{\text{sgn}}{\lambda + \mu} + \frac{1}{3\lambda + 4\mu} \right) (\delta_{ik}n_jn_l + \delta_{il}n_jn_k). \quad (9)$$

В формуле (9) параметр $C = \frac{1}{V} \sum_{\nu=1}^N (r_0^3)^{(\nu)}$ можно интерпретировать как отношение величины объема материала призмы, в котором существенно проявляется взаимодействие трещин, ко всему объему материала призмы. Обычно параметр C называют трещиноватостью образца. С достаточной для практики точностью в приближении невзаимодействующих трещин, расположенных в однородном изотропном материале, можно считать, что $0 < C \leq 0.3$. В реальном поликристаллическом образце горной породы параметр C , по-видимому, может достигать больших значений.

Рассмотрим качественно влияние трещиноватости на коэффициенты деформации образца. Формулы для соответствующих коэффициентов приведены в **Приложении**.

На рис. 2, *а, б, в* приведены результаты расчетов некоторых коэффициентов деформации растягиваемой (только $\sigma_{33} \neq 0$), сжимаемой (только $\sigma_{33} \neq 0$) и подвергнутой сдвигу (только $\sigma_{32} = \sigma_{23} \neq 0$) призмы с коллинеарными трещинами. Эти результаты рассчитаны при отсутствии стеснения внешних деформаций. При расчетах изменение ориентации трещин осуществляется путем вращения их плоскостей относительно координатной оси $(0, x_1)$, т.е. при $\varphi = 0$. (На всех рисунках штрих около символа означает, что данный символ соответствует какому-либо наблюдаемому коэффициенту деформации всего образца. Одноименные коэффициенты деформации материала образца обозначены аналогичными символами без штриха.)

Сравнение представленных на рис. 2, *а, б, в* результатов показывает существенное различие деформационных свойств растягиваемого, сжимаемого и подвергнутого сдвигу трещиноватого образца при отсутствии стеснения внешних деформаций.

Необходимо отметить следующие характерные проявления трещиноватости.

- Во первых, при растяжении и сжатии одноименные коэффициенты деформации трещиноватого образца существенно отличаются друг от друга (разномодульная нелинейность). Сжимаемость растягиваемого образца зависит от ориентации трещин, а сжимаемость сжатого образца совпадает с сжимаемостью его материала. Это обусловлено невозможностью раскрытия трещин под действием сжимающих нагрузок. Интересно отметить, что отношение наблюдаемых модулей Юнга сжимаемого и растягиваемого образцов примерно совпадает с экспериментально определяемым отношением прочностей при сжатии и растяжении горных пород.

- Во вторых, для растягиваемой призмы при некоторых значениях C и θ отношение коэффициентов Пуассона $\nu_{(2)}^I/\nu$ становится меньше нуля, т.е. поперечный размер растягиваемой призмы увеличивается. Это происходит, когда увеличение поперечного размера растягиваемой призмы за счет раскрытия трещин превышает его уменьшение, обусловленное свойствами материала (коэффициентом Пуассона ν). Необходимо отметить, что отрицательное значение коэффициента Пуассона допускается не только термодинамикой [22, 26].

- В третьих, в подвергнутом сдвигу трещиноватом образце может иметь место так называемое дилатансионное изменение наблюдаемого объема. Последнее обусловлено раскрытием трещин, ориентированных по плоскостям, на которых растягивающие напряжения отличны от нуля. Заметим, что сдвиг сплошной линейно-упругой однородной изотропной призмы не сопровождается изменением ее объема.

Приведенные на рис. 2, *a*, *b*, *в* результаты относятся к случаю ненапряженного начального состояния образца. Во многих экспериментах начальное состояние образца соответствует всестороннему гидростатическому сжатию ($\sigma_{ij}^0 = -\sigma^0 \delta_{ij}/3$), на которое в процессе эксперимента накладывается некоторое дополнительное нагружение. В гидростатически сжатом образце трещины закрыты, т.е. наблюдаемые коэффициенты податливости гидростатически сжатой призмы совпадают с коэффициентами податливости ее материала и равны $S_{ijkl} = \delta_{kl}/(3K)$. Пусть гидростатически сжатая в начальном состоянии призма дополнительно нагружена усилиями, которым соответствуют некоторые внешние напряжения. В этом случае определяющие уравнения можно записать в виде:

$$\varepsilon_{kl} = S_{ijkl} S_{ij}^{(0)}, \quad \varepsilon_{kl} = E_{kl} + \sigma^0 \delta_{kl}/(3K).$$

Несмотря на внешнее сходство этих определяющих уравнений с соотношениями (4), они описывают различные по своим деформационным свойствам тела. Это связано с тем, что наблюдаемые коэффициенты податливости зависят от величины суммарного раскрытия трещин, на которое существенно влияет начальное гидростатическое сжатие.

Рассмотрим еще один способ нагружения образца, который моделирует эксперимент со стеснением внешних деформаций. Такие эксперименты получают все большее распространение в связи с появлением нагружающих устройств с управляемой жесткостью [25].

Пусть на какой-либо одной (например $S_{(3)}$) грани сжимаемой призмы отличны от нуля только напряжения σ_{33}^0 . На этой грани деформации не стеснены, а на всех остальных гранях равны нулю внешние деформации $E_{11} = E_{22} = 0$. Пусть также $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0$. Такое деформирование можно осуществить, поместив образец в абсолютно жесткую обойму так, что возможно полное проскальзывание между гранями образца и обоймы. В этом случае из определяющих уравнений (4) можно найти различные коэффициенты деформации таким способом нагруженной трещиноватой призмы (см. **Приложение**). В качестве примера на рис. 2, *г* приведены результаты расчета наблюдаемого модуля Юнга сжимаемой трещиноватой призмы в условиях стеснения внешних деформаций. Сравнение представленных на рис. 2 результатов позволяют сделать вывод, что стеснение деформаций существенно влияет на наблюдаемые коэффициенты деформации трещиноватого образца. Это обстоятельство необходимо принимать во внимание при планировании экспериментов на прессах с управляемой жесткостью.

Результаты, представленные на рис. 2, получены при $a = \lambda/\mu = 1$. Изменение величины a в интервале 0.5 – 2.0 слабо влияет на коэффициенты деформации образца как целого.

Образец с хаотически ориентированными трещинами

В различных работах рассматривалась модель деформируемого образца, в котором радиусы всех трещин равны, а θ и φ являются непрерывными, случайными величинами. Деформационные свойства такого образца характеризуются математическими ожиданиями \widehat{S}_{ijkl} компонент наблюдаемых коэффициентов податливости (5), где сумма по ν заменяется на Nr_0^3/V . Если θ и φ статистически независимы и равномерно распределены в интервалах их возможных значений (совершенно хаотически ориентированные трещины), то \widehat{S}_{ijkl} не зависят от θ и φ . При этом трещиноватость не вызывает анизотропию деформационных свойств нагружаемого образца.

Экспериментальные результаты позволяют считать, что эффектами связанной с трещинами анизотропией можно пренебречь только тогда, когда приложенные к образцу внешние нагрузки очень малы по сравнению с его пределом прочности. Это значит, что часто рассматриваемая модель образца с совершенно хаотически ориентированными трещинами может иметь весьма ограниченное практическое применение.

Выводы

1. Определяющие уравнения квазистатически нагружаемого трещиноватого образца горной породы связывают средние по внешней поверхности образца компоненты вектора перемещений и вектора напряжений. Соответствие между указанными средними устанавливается тензором наблюдаемых (эффективных) коэффициентов податливости образца.

2. Наблюдаемые коэффициенты податливости образца зависят от его формы, количества находящихся в нем трещин, их конфигурации, взаимного расположения и способа нагружения образца.

3. Наличие начально открытых трещин в материале образца обуславливает различие деформационных свойств образца при растяжении и сжатии, влияние на указанные свойства начального гидростатического сжатия, а также на дилатансионное изменение объема образца при его сдвиге.

4. Наличие нехаотически ориентированных трещин в образце приводит к появлению анизотропии деформационных свойств. Наличие совершенно хаотически ориентированных трещин не приводит к появлению указанной анизотропии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Коэффициенты деформации образца как целого

Введем обозначения: $a = \lambda/\mu$, $1/E' = S_{3333}$ – величина, обратная наблюдаемому модулю Юнга; $1/K' = 3S_{33kk}$ – величина, обратная наблюдаемому модулю всестороннего сжатия; $\nu'_{(2)} = S_{3322}/S_{3333}$ – наблюдаемый коэффициент Пуассона; $1/\mu'_{(2)} = S_{3323}$ – величина, обратная наблюдаемому модулю сдвига. Коэффициенты деформации материала образца: $K = \lambda + 2\mu/3$, $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$, $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$.

1. Сжатие ($\sigma_{33} < 0$) без стеснения деформаций:

$$\begin{aligned}\frac{1/E'}{1/E} &= 1 + \frac{4(3a+2)(a+2)}{3(a+1)(3a+4)}C \cos^2 \theta, \\ \frac{1/K'}{1/K} &= 1 + \frac{12a(a+2)}{(3a+2)(3a+4)}C \cos^2 \theta, \\ \frac{\nu'_{(2)}}{\nu} &= -\frac{a+1}{(3a+2)\left(\frac{a+1}{3a+2} + \frac{4(a+2)}{3(3a+4)}C \cos^2 \theta\right)}, \\ \frac{1/\mu'_{(2)}}{1/\mu} &= -\frac{2(a+2)}{3(3a+4)}C \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

2. Растяжение ($\sigma_{33} > 0$) без стеснения деформаций:

$$\begin{aligned}\frac{1/E'}{1/E} &= 1 - \frac{4(3a+2)(a+2)(2a+3)}{3(a+1)^2(3a+4)}C \cos^2 \theta, \\ \frac{1/K'}{1/K} &= 1 - \frac{36a(a+2)}{(3a+2)(3a+4)}C \cos^2 \theta, \\ \frac{\nu'_{(2)}}{\nu} &= -\frac{a+1}{(3a+2)\left(\frac{a+1}{3a+2} - \frac{4(a+2)(2a+3)}{3(a+1)(3a+4)}C \cos^2 \theta\right)}, \\ \frac{1/\mu'_{(2)}}{1/\mu} &= \frac{2(a+2)(2a+3)}{3(a+1)(3a+4)}C \sin \theta \cos \theta \cos \varphi.\end{aligned}$$

3. Сдвиг ($\sigma_{32} > 0$) без стеснения деформаций:

$$\begin{aligned}\frac{1/K'}{1/K} &= -\frac{4(a+2)(3a+2)}{3}\left(\frac{\operatorname{sgn}}{a+1} + \frac{1}{3a+4}\right)C \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{1/\mu'_{(2)}}{1/\mu} &= \frac{1}{4} - \frac{2(a+2)}{3}\left(\frac{\operatorname{sgn}}{a+1} + \frac{1}{3a+4}\right)C \sin \theta \cos \theta \cos \varphi.\end{aligned}$$

4. Сжатие ($\sigma_{33} < 0$) со стеснением деформаций:

Найдем коэффициент деформации $1/E'$ сжимаемого образца при $E_{11} = E_{22} = 0$ и $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$. В таких условиях из формул (4) получим систему уравнений

$$\begin{cases} S_{1111}\sigma_{11} + S_{2211}\sigma_{22} + S_{3311}\sigma_{33} = 0 \\ S_{1122}\sigma_{11} + S_{2222}\sigma_{22} + S_{3322}\sigma_{33} = 0 \\ S_{1133}\sigma_{11} + S_{2233}\sigma_{22} + S_{3333}\sigma_{33} = E_{33}. \end{cases}$$

Из этой системы следует $E_{33} = \frac{1}{E'}\sigma_{33}$, где

$$\frac{1}{E'} = S_{3333} + S_{1133} \frac{S_{2222}S_{1133} - S_{1122}S_{2233}}{S_{1122}S_{1122} - S_{1111}S_{2222}} + S_{2233} \frac{S_{1111}S_{2233} - S_{1122}S_{1133}}{S_{1122}S_{1122} - S_{1111}S_{2222}}.$$

Примем во внимание формулу (9). В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{1/E'}{1/E} = & 1 + \frac{4(3a+2)(a+2)}{3(a+1)(3a+4)} C \cos^2 \theta + \frac{a^2}{2(3a+2)^2} \left(\frac{2a+1}{a+1} + \right. \\ & \left. + \frac{2(3a+2)(a+2)}{3(a+1)(3a+4)} \cdot C \sin^2 \theta \right) / \left(\frac{a^2}{4(3a+2)^2} - \frac{(a+1)^2}{(3a+2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{4(a+2)(a+1)}{3(3a+4)(3a+2)} C \sin^2 \theta - \frac{16(a+2)^2}{9(3a+4)^2} C \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sin^4 \theta \right). \end{aligned}$$

Заметим, что при $C = 0$ не совпадают одномерные коэффициенты деформации $1/E'$ одинаковых образцов, которые сжимаются без стеснения и со стеснением деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воларович М.П., Томашевская И.С., Будников В.А. Механика горных пород при высоких давлениях. М.: Наука, 1970. 152с.
2. Walsh J.B. The effect of cracks on compressibility of rock // J. Geophys. Res. 1965. Vol.70, N 2. P.381-389.
3. Walsh J.B. The effect of cracks on the uniaxial elastic compression of rocks // J. Geophys. Res. 1965. Vol.70, N 2. P.399-411.
4. Walsh J.B. The effect of cracks in rocks on Poisson's ratio // J. Geophys. Res. 1965. Vol.70, N 20. P.5249-5257.
5. Салганик Р.Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1973. N 4. С.149-158.
6. Budiansky B., O'Connel R.J. Elastic moduli of cracked solid // Inter. J. Solids Struct. 1976. Vol.12, N 2. P.81-97.
7. Канаун О.К. Случайное поле трещин в упругой сплошной среде // Исследования по упругости и пластичности. Л.: Изд. ЛГУ, 1974. N 10. С.66-83.

8. Вавакин А.С., Салганик Р.Л. Об эффективных характеристиках неоднородных сред с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1976. N 3. С.65–75.
9. Коваленко Ю.Ф., Салганик Р.Л. Трещиновидные неоднородности и их влияние на эффективные механические характеристики // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. N 5. С.76–86.
10. Вавакин А.С., Салганик Р.Л. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978. N 2. С.95–107.
11. Канаун С.К. Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде // Прикл. матем. и механ. 1980. Т.44, вып.6. С.1129–1139.
12. Henyey F.S., Pomphrey N. Self-consistent elastic moduli of a cracked solid // Geophys. Res. Lett. 1982. Vol.9, N 8. P.903–906.
13. Kachanov M.L. A microcrack model of rock inelasticity // Mech. Mater. 1982. Vol.1, N 1. P.19–41.
14. Житников Ю.В., Тулинов Б.М. Расчет деформационных свойств твердого тела с закрытой трещиноватостью в сложно-напряженном состоянии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. N 1. С.117–124.
15. Чекин Б.С. Об эффективных параметрах упругой среды со случайно-распределенными трещинами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970. N 10. С.13–21.
16. Garbin H.D., Knopoff L. The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of a circular cracks // Quart. Appl. Math. 1973. Vol.30, N 4. P.453–464.
17. Garbin H.D., Knopoff L. The shear modulus of a material permeated by a random distribution of a free circular cracks // Quart. Appl. Math. 1975. Vol.33, N 3. P.296–300.
18. Канаун О.К., Левин В.М. О построении эффективного волнового оператора для среды с изолированными неоднородностями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. N 5. С.67–76.
19. Канаун О.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд.-во Петрозав. ун-та, 1993. 518 с.
20. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций // М.: Изд-во ин. лит., 1963. С.11–139.
21. Кренер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. М.: Мир, 1965. 104 с.
22. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
23. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
24. Слепян Л.Н. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1981. 295 с.
25. Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Наука, 1975. 416 с.
26. Keskar N.R., Chelikowsky J.R. Negative Poisson ratios in crystalline SiO_2 from first principles calculations // Nature. 1992. Vol.358, N 6383. P. 222–224.
27. Labus J. F. The problem of mashine stiffness revisited // Geophys. Res. Lett. 1991. Vol. 18, N 3. P.439–442.