УДК 550.3

РЕОЛОГИЧЕСКАЯ АНИЗОТРОПИЯ МАНТИИ ЗЕМЛИ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Б.И. БИРГЕР
Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта
Российской академии наук, Москва

Предложенная автором ранее нелинейная интегральная (имеющая память) универсальная реологическая модель мантийных пород обобщена на случай кристаллов, обладающих анизотропной реологией. Поскольку мантия является поликристаллической, а кристаллические зерна, размеры которых порядка миллиметра, ориентированы хаотически, анизотропия исчезает при усреднении по объему. Но мантийные течения приводят к преимущественной ориентации зерен, что и дает анизотропию. В рамках рассматриваемой реологической модели важнейшей характеристикой течения является глубина памяти: деформации, которые существовали до момента времени, определяемого глубиной памяти, не влияют на напряжение в текущий момент. Для течений, у которых характерный период изменения скорости значительно превышает глубину памяти (такие течения названы квазистационарными), используемая реологическая модель сводится к анизотропной модели степенно́й жидкости, а для течений, характерный период которых значительно меньше глубины памяти, – к анизотропной модели Андраде. Показано, что течения, вызываемые нестационарной тепловой конвекцией в мантии, являются квазистационарными. Квазистационарными оказываются и послеледниковые течения, наложенные на нестационарные конвективные течения.

RHEOLOGICAL ANISOTROPY OF THE EARTH'S MANTLE AND QUASI-STATIONARY FLOWS

B.I. BIRGER
O.Yu. Schmidt Institute of Physics of the Earth,
Russian Academy of Sciences, Moscow

The nonlinear integral (having a memory) universal rheologic model of the mantle rock put forward by this author earlier, is now extended to the case of crystals with anisotropic rheology. Since the mantle is polycrystalline and crystal grains, having dimensions of the order of a millimeter, are oriented chaotically, anisotropy vanishes after averaging over the volume. However, mantle flows produce a preferred orientation of crystal grains and, hence, anisotropy. Within the framework of the present rheologic model, the most important characteristic of flow is the memory depth: the strains which had existed before the instant determined by the memory depth do not affect the stress at the instant of observation. The rheologic model reduces to the anisotropic power-law fluid model for flows which have the typical period of velocity change much in excess of the memory depth (such flows are called quasi-stationary) and reduces to the anisotropic Andrade model for flows with typical periods much shorter than the memory depth. It is shown that the flow associated with time-dependent mantle convection is quasi-stationary. Postglacial flows imposed on time-dependent convective flows prove to be quasi-stationary too.

Введение

Построение универсальной, т.е. пригодной при изучении геофизических процессов с любыми характерными временами, реологической модели мантии является одной из центральных проблем геофизики. Имея такую модель, можно использовать оценки реологических параметров, полученные при рассмотрении быстрых процессов – например, процессов затухания сейсмических волн, для исследования медленных процессов – например, тепловой конвекции в мантии.

Реология мантии определяется двумя основными физическими микропроцессами: диффузией вакансий или атомов примесей и движением (скольжением или переползанием) дислокаций. Второй из этих микропроцессов связан с симметрией кристаллов, в которых он происходит. Определенным образом расположенные в кристалле плоскости дислокаций приводят к анизотропной реологии. Для кристалла оливина – а из этого минерала в основном состоит мантия – в экспериментах наблюдается сильно анизотропная ползучесть [1]. Поскольку мантия является поликристаллической, при отсутствии течений в мантии нет и анизотропии. Точнее говоря, анизотропия, присутствующая в хаотически ориентированных кристаллических зернах, размеры которых порядка миллиметра, исчезает при усреднении по объему. Но течения приводят к преимущественной ориентации зерен, что и дает анизотропию.

Ранее автором [2] была предложена нелинейная интегральная (имеющая память) универсальная реологическая модель мантии, которая сводится к модели степенно́й жидкости в случае стационарных течений и к линейной интегральной модели Андраде для течений, связанных с малыми деформациями. Цель настоящего исследования – обобщить эту модель на случай кристаллов, обладающих анизотропной реологией, и показать к каким следствиям приводит такое обобщение, когда модель применяется к таким геофизическим процессам в мантии как тепловая конвекция и послеледниковые течения.

В разделе 1 работы кратко изложены основные свойства изотропной реологической универсальной модели; в разделе 2 вводится представление о периодических и наложенных течениях; в разделе 3 рассматривается анизотропная реология монокристалла; в разделе 4 исследуется анизотропия, вызванная конвективным течением в поликристаллической мантии; в разделе 5 вводится представление о квазистационарных течениях; в разделе 6 рассматриваются послеледниковые течения, наложенные на конвективное течение в мантии; в разделе 7 выясняется роль диффузионной ползучести.

1. Реологическая модель мантии

Реология литосферы описывается нелинейной наследственной моделью, в рамках которой тензор девиатора напряжений σ_{ij} связан с тензором деформаций ε_{ij} интегральным соотношением

$$\sigma_{ij}\,(t, x_i) = 2\int\limits_0^\infty R(t_1) g(\varepsilon) \varepsilon_{ij}(t - t_1) dt_1, \tag{1}$$

где t – момент наблюдения; $t - t_1$ – текущее время; $\varepsilon = (\varepsilon_{kl}\varepsilon_{kl}/2)^{1/2}$ – второй инвариант тензора деформаций (здесь и в дальнейшем, кроме специально оговоренных случаев, предполагается суммирование по повторяющимся индексам); ε_{tr} – переходное значение инварианта ε, наблюдаемое в лабораторных исследованиях ползучести горных пород; функция $g(\varepsilon)$ имеет вид

$$g(\varepsilon) \equiv 1, \text{ при } \varepsilon \le \varepsilon_{tr},$$
$$g(\varepsilon) \equiv 0, \text{ при } \varepsilon > \varepsilon_{tr},$$

а интегральное ядро релаксации записывается как

$$R(t_1) = A t_1^{-m-1} / \Gamma(m)\Gamma(1 - m), \tag{2}$$

где $\Gamma\,(m)$ – гамма-функция, m – показатель степени в законе Андраде, описывающем неустановившуюся ползучесть; A – реологический параметр Андраде. Следует отметить, что деформация отсчитывается от состояния в момент наблюдения, поэтому

$$\varepsilon_{ij}\,(t) \equiv 0.$$

Реологическое соотношение (1) определяет напряжение в данной точке пространства x_i как интеграл от истории деформаций в бесконечно малой окрестности материальной точки, находящейся в момент наблюдения t в данной точке пространства x_i.

При $\varepsilon \le \varepsilon_{tr}$ реологическое соотношение (1) сводится к линейному интегральному соотношению, которое определяет реологическую модель Андраде [2],

$$\sigma_{ij} = 2\int\limits_0^\infty R(t_1) \varepsilon_{ij}(t - t_1) dt_1 = 2\int\limits_0^\infty \Pi(t_1) \dot{\varepsilon}_{ij}(t - t_1) dt_1, \tag{3}$$

где $\Pi\,(t)$ – интегральное ядро памяти, связанное с ядром релаксации соотношениями

$$\frac{d\Pi}{dt_1} = -R(t_1), \quad \Pi(\infty) = 0, \tag{4}$$

$$\Pi(t_1) = At_1^{-m}/m\Gamma(m)\Gamma(1-m). \tag{5}$$

При постоянном напряжении $\sigma_{ij} = const$, приложенном в момент времени $t - t_1 = 0$ (до этого момента $\sigma_{ij} = 0$), из соотношений (3)–(5) следует

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij}[t^m - (t-t_1)^m]/A, \quad 0 \le t_1 \le t, \\ 2\varepsilon_{ij} &= \sigma_{ij}t^m/A, \quad t_1 \ge t. \end{aligned} \tag{6}$$

Если отсчитывать время от момента приложения напряжения и измерять деформации относительно состояния в этот момент, уравнения (6) сводятся к известному закону Андраде для неустановившейся ползучести

$$2\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}f\,(t)\,, \tag{7}$$

$$f\,(t) = t^m/A,$$

где $f\,(t)$ – функция ползучести.

В случае стационарного течения

$$\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}t_1, \tag{8}$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij} = const$, и уравнение (1) принимает вид

$$\sigma_{ij} = 2\dot{\varepsilon}_{ij}\int\limits_0^{t_M} t_1R(t_1)dt_1, \tag{9}$$

где t_M – глубина памяти

$$t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon} \tag{10}$$

(напряжение не зависит от деформаций, которые имели место при $t_1 > t_M$). Простое линейное соотношение (8) справедливо только при малых деформациях. Деформации ε_{ij}, входящие в уравнение (1), действительно малы, если $\varepsilon_{tr} \ll 1$ (только этот случай и будет рассматриваться).

В соотношениях (8) и (9) подразумевается, что $\dot{\varepsilon}_{ij}$ не зависит не только от t (стационарность), но и от t_1, что предполагает однородность $\dot{\varepsilon}_{ij}$ (примером течения с однородной скоростью деформации является течение Куэтта). Скорость деформации при малых значениях t_1 можно записать в виде

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(t-t_1) = \dot{\varepsilon}_{ij}\,(t) - \frac{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt_1}t_1, \tag{11}$$

причем в случае стационарного течения $\dot{\varepsilon}_{ij}\,(t) = const.$ Положив $t_1 = t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon}$, учитывая, что

$$dx_k/dt = v_k$$

(где v_k – вектор скорости), и используя оценки

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \approx \dot{\varepsilon} \approx v/L \quad \text{и} \quad \partial\dot{\varepsilon}_{ij}/\partial x_k \approx v/L^2$$

(где v – характерное значение скорости, L – характерная длина, на которой изменяется скорость), нетрудно показать, что второе слагаемое в правой части (11) пренебрежимо мало по сравнению с первым слагаемым, когда $\varepsilon_{tr} \ll 1$. Таким образом, условие $\varepsilon_{tr} \ll 1$ обеспечивает не только линейность соотношений между деформациями и их скоростями, но и квазиоднородность течения. Квазиоднородность подразумевает, что на глубине памяти стационарное течение можно рассматривать как однородное и не учитывать зависимости $\dot{\varepsilon}_{ij}$ от t_1, возникающей из-за неоднородности $\dot{\varepsilon}_{ij}$, т.е. из-за зависимости $\dot{\varepsilon}_{ij}$ от пространственных координат x_i.

Как следует из (2), (9) и (10),

$$\sigma_{ij} = \frac{2A(\varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon})^{1-m}}{(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m)}\dot{\varepsilon}_{ij}. \tag{12}$$

Установившаяся ползучесть горных пород хорошо описывается реологической моделью степенно́й неньютоновской жидкости

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = B\sigma^{n-1}\sigma_{ij}, \quad \sigma = (\sigma_{kl}\sigma_{kl}/2)^{1/2}. \tag{13}$$

Реологическое соотношение (13) после обращения принимает вид

$$\sigma_{ij} = B^{-1/n}\dot{\varepsilon}^{(1-n)/n}\dot{\varepsilon}_{ij}, \quad \dot{\varepsilon} = (\dot{\varepsilon}_{kl}\dot{\varepsilon}_{kl}/2)^{1/2}. \tag{14}$$

Сравнивая (12) и (14), нетрудно видеть, что используемая нелинейная наследственная модель в случае стационарного течения сводится к модели степенно́й жидкости с реологическими параметрами n и B, которые определяются соотношениями

$$n = 1/m, \quad 1/B = [2A/(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m)]^{1/m}\varepsilon_{tr}^{(1-m)/m}. \tag{15}$$

При $m = 1/3$ (типичное значение m для геоматериалов) численный множитель $(1 - m)\Gamma(m)\Gamma(1 - m) \approx 3$, а уравнение (15) сводится к

$$n = 3, \quad A = cB^{-1/3}, \tag{16}$$

где коэффициент $c \approx 7.5 \div 15$ при ε_{tr} порядка $0.03 \div 0.1$.

Зависимость реологического параметра B, который характеризует установившуюся ползучесть в рамках модели степенно́й жидкости (13), от температуры и давления определяется законом Аррениуса

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{B_\infty} \exp[(E + pV)/RT], \tag{17}$$

где B_∞ – значение параметра Андраде при бесконечно высокой температуре, E и V – соответственно, энергия и объем активации, $R = 2$кал$\cdot$моль$^{-1}\cdot$K^{-1} – газовая постоянная. Вместо того, чтобы вводить энергию и объем активации, можно в уравнении (17) записывать зависимость от температуры и давления в виде

$$\frac{E + pV}{RT} = \frac{aT_m\,(p)}{T}, \tag{18}$$

где $T_m\,(p)$ – температура плавления, зависящая от давления, a – безразмерный параметр, значение которого для мантии Земли оценивается как $a \approx 20 \div 30$.

Как следует из (15), (17) и (18), параметр Андраде зависит от температуры и давления как

$$A = A_\infty \exp[maT_m(p)/T],$$

причем при $m = 1/3$ параметры A_∞ и B_∞ связаны соотношением (16).

2. Периодические и наложенные течения

Для периодического течения с частотой ω и малой амплитудой, зависящей от пространственных координат, тензор скоростей деформаций записывается как

$$\dot\varepsilon_{ij} = \dot\varepsilon_{ij}(x_i) \exp[i\omega(t - t_1)], \tag{19}$$

а тензор деформаций имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \dot\varepsilon_{ij}(x_i) \exp(i\omega t)[1 - \exp(-i\omega t_1)]/i\omega.$$

Подставляя (19) в (3), получаем реологический закон для периодических течений малой амплитуды, записанный в ньютоновской форме

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2F(\omega)\dot{\varepsilon}_{ij}, \\ F(\omega) &= \int_0^\infty \Pi(t_1)\exp(-i\omega t_1)dt_1 = \Pi^*(i\omega), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\Pi^*(i\omega)$ – лапласовское изображение интегрального ядра памяти. Функция $F(\omega)$ – эффективная ньютоновская вязкость, которая для принятой здесь реологической модели принимает вид

$$F(\omega) = A(i\omega)^{m-1}/m\Gamma(m). \tag{21}$$

Рассматривая периодическое течение малой амплитуды, наложенное на основное стационарное течение, деформации и напряжения представим в виде

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \varepsilon'_{ij}, \quad \sigma_{\mathrm{ij}} = \bar{\sigma}_{ij} + \sigma'_{ij}, \tag{22}$$

где верхняя черта и штрих обозначают, соответственно, основное и наложенное течение. Как следует из (12), эффективная вязкость основного течения записывается как

$$\bar{\eta} = \frac{At_M^{1-m}}{(1-m)\Gamma(m)\Gamma(1-m)}, \quad t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\bar{\varepsilon}}. \tag{23}$$

Реологический закон для наложенного течения, получаемый в результате подстановки (22) в (1),

$$\sigma'_{ij} = 2\eta'_{ijkl}\dot{\varepsilon}'_{kl} \tag{24}$$

имеет следующие асимптотики для низких и высоких частот:

$$\eta'_{ijkl} = \bar{\eta}[\delta_{ik}\delta_{jl} - (1-m)\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}/2\dot{\bar{\varepsilon}}^2], \quad \omega t_M \ll 1, \tag{25}$$

$$\eta'_{ijkl} = [A(i\omega)^{m-1}/m\Gamma(m)]\delta_{ik}\delta_{jl}, \quad \omega t_M \gg 1. \tag{26}$$

Асимптотическое соотношение (25) показывает, что наложенное течение описывается моделью степенно́й жидкости в случае, когда период наложенного течения велик по сравнению с глубиной памяти, характеризующей основное стационарное течение. Соотношение (25) можно получить, подставляя (22) в реологическое соотношение (14), соответствующее степенно́й жидкости.

Когда период колебаний мал по сравнению с глубиной памяти, реология наложенного течения изотропна и является точно такой же, как реология периодического течения в отсутствии основного стационарного течения, что следует из сравнения реологического закона (24)–(26) с соотношениями (20) и (21). Асимптотическое соотношение (26) получено в нулевом приближении по малому параметру $1/\omega t_M$. Реологическая анизотропия наложенного течения появляется в первом приближении по этому параметру. Как следует из (21) и (23),

$$F(\omega)/\bar{\eta} = (i\omega t_M)^{m-1}(1-m)\Gamma(1-m)/m. \tag{27}$$

Соотношение (27) показывает, что при $m = 1/3$ эффективная вязкость наложенного течения значительно ниже, чем эффективная вязкость основного течения, когда $\omega t_M \gg 1$.

Считая, что $\dot{\varepsilon}_{ij}(t-t_1) = 0$ при $t_1 > t$, перепишем (3) в виде

$$\sigma_{ij} = 2\int\limits_0^t \Pi(t_1)\dot{\varepsilon}_{ij}(t-t_1)dt_1. \tag{28}$$

Такая форма удобна для применения преобразования Лапласа, которое и было введено для задач с начальными условиями и для функций, равных нулю до начального момента.

Линейный интегральный реологический закон можно записать в виде

$$2\varepsilon_{ij} = \int\limits_0^t K(t_1)\sigma(t-t_1)dt_1, \tag{29}$$

где интегральное ядро ползучести $K(t)$ связано с функцией ползучести (7) соотношением

$$K(t) = df/dt.$$

Преобразуя уравнения (28) и (29) по Лапласу, находим простую связь между интегральным ядром памяти и ядром ползучести. Для периодического течения эта связь записывается в следующем виде:

$$\Pi^*(i\omega) = \frac{1}{i\omega K^*(i\omega)}.$$

3. Реология монокристалла

Чтобы рассмотреть реологию кристалла с ромбической (в иностранной литературе – орторомбической) симметрией [3, 4] – именно такой симметрией обладает оливин, из которого состоит в основном мантия Земли, – достаточно, вместо параметра Андраде A, ввести тензор четвертого ранга с компонентами

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2} A_{ij}^{(S)} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \delta_{ij} A_{jk}^{(N)} \delta_{kl}. \tag{30}$$

В правой части равенства (30) не предполагается суммирование по повторяющимся индексам, $A_{ij}^{(S)}$ и $A_{ij}^{(N)}$ – симметрические матрицы, причем диагональные элементы матрицы с индексом (S) равны нулю ($A_{ij}^{(S)} = 0$ при $i = j$). Поэтому матрица $A_{ij}^{(N)}$ имеет 6 независимых компонент, а матрица $A_{ij}^{(S)}$ – только 3. Индекс S обозначает компоненты тензора, связанные со сдвигом (здесь имеется в виду простой сдвиг). Примером простого сдвига является напряженное состояние, при котором отличны от нуля только напряжения σ_{12}. Вязкие деформации простого сдвига создаются за счет скольжения дислокаций в кристалле. Индекс N обозначает компоненты тензора, связанные с нормальными девиаторными напряжениями (чистый сдвиг). Примером чистого сдвига является напряженное состояние, при котором отличны от нуля только девиаторные напряжения σ_{11} и σ_{22}, причем $\sigma_{11} = -\sigma_{22}$. Вязкие деформации чистого сдвига производятся посредством переползания дислокаций в кристалле. Среду, в которой происходит и скольжение и переползание дислокаций, можно представить в виде последовательного соединения двух элементов с различными механизмами вязкости. Последовательное соединение подразумевает, что полная деформация есть сумма деформаций в первом и втором элементе, а напряжения в элементах равны друг другу:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(S)} + \varepsilon_{ij}^{(N)}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(S)} = \sigma_{ij}^{(N)},$$

причем $\varepsilon_{ij}^{(S)} = 0$ при $i = j$, а $\varepsilon_{ij}^{(N)} = 0$ при $i \neq j$.

Первый элемент описывается реологическим соотношением

$$\sigma_{ij} = 2A_{ijkl}^{(S)} \varepsilon_{kl}^{(S)}, \quad i \neq j, \quad k \neq l,$$

а второй –

$$\sigma_{ij} = 2A_{ijkl}^{(N)} \varepsilon_{kl}^{(N)}, \quad i = j, \quad k = l.$$

Из этих соотношений следует

$$\sigma_{ij} = 2A_{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

где A_{ijkl} определяется соотношением (30).

Поскольку $\sigma_{ii} = 0$ (тензор σ_{ij} представляет девиаторные напряжения), матрица $A_{ij}^{(N)}$, введенная в уравнении (30), должна удовлетворять требованию

$$A_{ij}^{(N)}\varepsilon_{jj} = 0, \tag{31}$$

причем $\varepsilon_{ii} = 0$, поскольку тензор ε_{ij} описывает девиаторные деформации. Из требования (31) следуют соотношения

$$\begin{aligned} A_{11}^{(N)} + A_{12}^{(N)} &= A_{33}^{(N)} + A_{23}^{(N)}, \\ A_{22}^{(N)} + A_{12}^{(N)} &= A_{33}^{(N)} + A_{13}^{(N)}. \end{aligned} \tag{32}$$

Таким образом, матрица $A_{ij}^{(N)}$ имеет не 6, а только 4 независимых компоненты. Если же симметрия кристалла такова, что отличны от нуля только диагональные компоненты матрицы $A_{ij}^{(N)}$, то из соотношений (32) следует, что

$$A_{11}^{(N)} = A_{22}^{(N)} = A_{33}^{(N)} = A_N,$$

т.е. матрица имеет только одну независимую компоненту.

Ромбическая симметрия будет использована в следующей работе, где будет исследовано анизотропное затухание сейсмических волн. Пока будем рассматривать более простой случай анизотропии, при которой тензор (30) имеет только следующие отличные от нуля компоненты:

$$A_{1212} = A_{1313} = A_{2323} = A_S,$$
$$A_{1111} = A_{2222} = A_{3333} = A_N,$$

причем в первой строке опущены компоненты, которые получаются из выписанных компонент в результате перестановки первого индекса и второго и третьего индекса и четвертого. При такой упрощенной симметрии тензор четвертого ранга принимает вид

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2}A_S(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (A_N - A_S)\,\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}, \tag{33}$$

где в правой части равенства не предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

В случае монокристалла в уравнениях (1) – (10) следует заменить R, П и A на R_{ijkl}, Π_{ijkl} и A_{ijkl}, а уравнения (14) и (15) записываются в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\dot{\varepsilon}^{-2/3}\dot{\varepsilon}_{kl}, \tag{34}$$

$$C_{ijkl} = \frac{2}{3}A_{ijkl}\varepsilon_{tr}^{2/3}. \tag{35}$$

Формулы (34) и (35) соответствуют случаю $n = 1/m = 3$. Только этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем.

4. Анизотропия, вызванная конвективным течением

Исследуя различные по пространственным и временны́м масштабам течения в мантии, будем использовать декартовую систему координат, у которой ось z вертикальна, а горизонтальная ось x направлена вдоль основного конвективного течения. Когда конвективное течение является течением Куэтта, только одна компонента тензора девиатора скорости деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}_{xz}$ отлична от нуля. В поликристаллической мантии кристаллические зерна поворачиваются таким образом, чтобы основному конвективному течению соответствовала наименьшая вязкость. Для этого плоскости скольжения дислокаций должны быть ориентированы параллельно основному течению. Поскольку плоскости скольжения в кристаллических зернах оливина перпендикулярны кристаллографическим осям, зерна должны расположиться так, чтобы направления кристаллографических осей 1, 2 и 3 совпадали с осями координат x, y и z, с помощью которых описывается конвективное движение в мантии. При таком расположении зерен та часть мантии, где происходит горизонтальное сдвиговое течение, ведет себя как монокристалл, который характеризуется тензором Андраде (33). Но, поскольку не все зерна поворачиваются в нужном направлении, значение A_S для мантии больше, чем для отдельного зерна, а значение A_N меньше, т.е. мантия менее анизотропна (A_S/A_N ближе к единице), чем отдельное кристаллическое зерно, для которого $A_S/A_N \ll 1$.

Отметим, что, когда конвективное течение имеет характер чистого сдвига (отличны от нуля только компоненты тензора девиатора скоростей деформаций $\dot{\bar{\varepsilon}}_{xz} = -\dot{\bar{\varepsilon}}_{zz}$) – а такого рода течения имеют место в угловых областях конвективных ячеек, – плоскости скольжения и кристаллографические оси зерен стремятся ориентироваться под углом 45° к осям x и z. При такой ориентации зерен вязкость данного течения минимальна.

Для рассматриваемого конвективного течения Куэтта справедливо соотношение

$$\bar{\sigma}_{xz} = 2\bar{\eta}\dot{\bar{\varepsilon}}_{xz} \quad , \tag{36}$$

где вязкость определена как

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3}A_S t_M^{2/3}, \quad t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\bar{\varepsilon}} \quad , \tag{37}$$

где $\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\bar{\varepsilon}}_{xz}$.

Уравнения (25) и (26), которые описывают наложенные течения, для кристалла принимают вид

$$\eta'_{ijkl} = \frac{1}{3}A_{ijpq}t_M^{1-m}[\delta_{pk}\delta_{ql} - (1-m)\dot{\bar{\varepsilon}}_{pq}\dot{\bar{\varepsilon}}_{kl}/2\dot{\bar{\varepsilon}}^2], \quad \omega t_M \ll 1, \tag{38}$$

$$\eta'_{ijkl} = A_{ijkl}(i\omega)^{m-1}/m\Gamma(m), \quad \omega t_M \gg 1. \tag{39}$$

В случае, когда $m = 1/3$ и только одна компонента тензора $\dot{\bar{\varepsilon}}_{xz}$ не равна нулю, из (38) следует

$$\begin{aligned} &\sigma'_{13} = \frac{2}{9}t_M^{2/3}A_S\dot{\varepsilon}'_{13}, \\ &\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}t_M^{2/3}A_N\dot{\varepsilon}'_{ij}, \quad i = j, \\ &\sigma'_{ij} = \frac{2}{3}t_M^{2/3}A_S\dot{\varepsilon}'_{ij}, \quad i \neq j, \quad i \neq 1, \quad j \neq 3, \end{aligned} \tag{40}$$

причем, в случае рассматриваемого здесь основного конвективного течения в мантии, индекс $i = 1$ соответствует индексу x, а индекс $i = 3$ – индексу z. Таким образом, тензор вязкости наложенного медленного ($\omega t_M \ll 1$) течения имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} &\eta'_{1313} = \frac{1}{9}t_M^{2/3}A_S = \frac{1}{3}\bar{\eta}, \\ &\eta'_{1212} = \eta'_{2323} = \frac{1}{3}t_M^{2/3}A_S = \eta_S = \bar{\eta}, \\ &\eta'_{1111} = \eta'_{2222} = \eta'_{3333} = \frac{1}{3}t_M^{2/3}A_N = \eta_N, \end{aligned} \tag{41}$$

где $\bar{\eta}$ – вязкость основного течения, определяемая равенством (37). Остальные компоненты тензора η'_{ijkl} равны нулю, кроме, конечно, компонент, которые получаются перестановкой первого и второго, а также третьего и четвертого индексов в уравнениях (41).

Формулы (40) и (41) показывают, что наложенные течения характеризуются тремя коэффициентами вязкости: η_N для течений типа чистого сдвига; $\eta_S/3$ для течений типа простого сдвига, происходящих в плоскости основного течения; η_S для течений типа простого сдвига, происходящих в других плоскостях.

Анизотропия вязких свойств мантии обусловлена двумя причинами. Во-первых, анизотропия возникает за счет поворота зерен в поликристалле в направлении основного течения. Во-вторых, анизотропия связана с нелинейной реологией, которая описывается моделью степенно́й жидкости. Именно в результате этой нелинейности коэффициенты вязкости для течений простого сдвига в плоскости основного течения и в других плоскостях отличаются в 3 раза (когда показатель степени в модели степенно́й жидкости равен 3). Поскольку для оливина эффективные вязкости η_S и η_N отличаются на два порядка [5], "кристаллический" механизм анизотропии значительно эффективнее, чем "нелинейный". Кроме того, как уже отмечалось выше, анизотропия, связанная с нелинейностью, имеет место только в случае медленных наложенных течений.

5. Квазистационарные течения

Условие $\omega t_M \ll 1$, при котором наложенное колебательное течение адекватно описывается реологической моделью степенно́й жидкости, является очевидным следствием общего критерия квазистационарности течения

$$T \gg \varepsilon_{tr}/\dot{\bar{\varepsilon}}, \tag{42}$$

который соответствует используемой наследственной реологической модели. Согласно критерию (42), течение квазистационарно, если характерное время изменения скорости деформации T велико по сравнению с глубиной памяти $t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\bar{\varepsilon}}$. Подчеркнем, что в рамках наследственной реологической модели условие квазистационарности течения дает возможность применять модель степенной жидкости при описании этого течения, поскольку на глубине памяти течение ведет себя как стационарное. При большой скорости деформации глубина памяти мала и критерию квазистационарности (42) удовлетворяют даже течения, у которых скорость деформаций быстро изменяется – например, колебательные течения с высокой частотой.

В случае, когда основное конвективное течение является нестационарным, черта сверху попрежнему обозначает основное течение, а в критерий квазистационарности (42) входит значение скорости деформации $\dot{\bar{\varepsilon}}$, измеряемое в момент наблюдения.

При рассмотрении наложенных течений подразумевалось, что

$$\dot{\varepsilon}' \ll \dot{\varepsilon}, \tag{43}$$

т.е. скорость деформации, связанная с наложенным течением, значительно ниже, чем скорость деформации, связанная с основным течением. Именно поэтому глубина памяти $t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon}$ в критерии (42) определяется скоростью деформации основного течения. Условию (43) удовлетворяют, в частности, послеледниковые течения, наложенные на основное конвективное течение в мантии.

Нестационарное конвективное течение можно представить в виде малоамплитудных конвективных пульсаций, наложенных на крупномасштабное стационарное конвективное течение. Однако скорости деформаций, связанные с этими пульсациями, могут значительно превышать скорости деформаций, обусловленные стационарным конвективным течением, что принципиально отличает конвективные пульсации от "обычных" (в частности, послеледниковых) наложенных течений.

Возникновение нестационарной конвекции при достаточно высоком числе Рэлея связано с неустойчивостью пограничных слоев, образованных стационарной конвекцией. Эта неустойчивость приводит к образованию мелкомасштабных конвективных вихрей в погранслоях, размеры вихрей – того же порядка, что и толщина погранслоя. Мелкомасштабные вихри, увлекаемые стационарным течением в погранслое, попадают из верхнего холодного погранслоя в нисходящий холодный поток, образованный крупномасштабной стационарной конвекцией. Вихри, возникающие в погранслое, могут, не доходя до нисходящего крупномасштабного стационарного потока, создавать холодные нисходящие термики. Эти процессы и вызывает пульсации в крупномасштабном конвективном течении. Продолжительность одной пульсации определяется временем T, за которое мелкомасштабный конвективный вихрь проходит через фиксированную точку,

$$T = l/V, \tag{44}$$

где l – размер вихря, а V – скорость стационарного крупномасштабного конвективного течения. Скорость деформаций для крупномасштабного течения оценивается как

$$\dot{\varepsilon}_{ls} = V/d,$$

где d – толщина конвективного слоя, а скорость деформаций, связанных с возникающими в погранслое мелкомасштабными вихрями, оценивается как

$$\dot{\varepsilon}_{ss} = V_{ss}/l. \tag{45}$$

Таким образом, скорость деформации $\dot{\varepsilon}$ определяется не крупномасштабным, а мелкомасштабным течением, т.е. $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ss}$, если

$$V_{ss}/V \gg l/d. \tag{46}$$

Подставляя (44) и (45) в критерий (42), находим, что для квазистационарности конвективного течения необходимо выполнение условия

$$V_{ss}/V \gg \varepsilon_{tr}, \tag{47}$$

где $\varepsilon_{tr} \approx 3 \cdot 10^{-2}$.

Скорость мелкомасштабного течения относительно мала

$$V_{ss}/V \ll 1. \tag{48}$$

Поскольку безразмерные величины ε_{tr} и l/d значительно меньше единицы, условие (48) не противоречит условиям квазистационарности (46) и (47).

С ростом числа Рэлея последовательно появляются новые, все более короткие пульсации, связанные с возникновением все более мелкомасштабных вихрей. При высоком числе Рэлея в мантии реализуется турбулентная конвекция, что и демонстрируют наблюдаемые в численных экспериментах хаотические очень короткие пульсации.

При развитой турбулентности в пульсациях, наложенных на стационарное течение, заключена малая часть всей кинетической энергии. Но именно в этих пульсациях, несущественных с точки зрения общей усредненной картины течения, и происходит диссипация энергии [6]. Поскольку кинетическая энергия определяется квадратом скорости, а диссипация – квадратом скорости деформации, отсюда следует, что пульсационные скорости малы по сравнению со скоростью стационарного течения, а пульсационные скорости деформаций относительно велики и определяют глубину памяти. Повидимому, можно сделать и более сильное утверждение: чем короче пульсации, тем выше обусловленные ими скорости деформаций и меньше глубина памяти для турбулентного течения. При высоких числах Рэлея нестационарная конвекция переходит в турбулентную, но в мантии Земли число Рэлея недостаточно велико для возникновения развитой турбулентности, и скорее можно говорить о нестационарной пульсационной конвекции. Если сделанное утверждение, безусловно требующее проверки в численных экспериментах, является верным, любое конвективное течение в мантии с нелинейной наследственной реологией (описанной выше в разделе 1) можно считать квазистационарным и, следовательно, использовать реологическую модель степенно́й неньютоновской жидкости.

6. Послеледниковые течения, наложенные на конвективные течения в мантии

В работе [2] использована оценка $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-16} c^{-1}$, справедливая для стационарной конвекции в мантии Земли. Поскольку $\varepsilon_{tr} \approx 3 \cdot 10^{-2}$, глубина памяти в этом случае оценивается как $t_M \approx 3 \cdot 10^{14} c \approx 10^7$лет, а послеледниковые непериодические течения в мантии, характерное время которых $T_{pg} \approx 10^4$лет, не являются квазистационарными и описываются моделью Андраде. (Когда $T \ll t_M$, формула (3) справедлива для напряжений σ'_{ij} и деформаций ε'_{ij}, характеризующих наложенное течение.) Эффективная вязкость мантии, соответствующая послеледниковым движениям, в этом случае дается приближенной формулой, полученной в работе [7],

$$\eta'_{pg} = A T_{pg}^{2/3}. \tag{49}$$

Формула (49) не учитывает анизотропию коэффициента Андраде. Без учета анизотропии, как следует из (23) при $m = 1/3$, эффективная вязкость, характеризующая стационарную конвекцию в мантии, записывается как

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} A t_M^{2/3}. \tag{50}$$

Поскольку $t_M \gg T_{pg}$, из (49) и (50) следует, что $\eta_{pg} \ll \bar{\eta}$.

Конвекция в мантии под континентами исследована в рамках реологической модели степенно́й жидкости в работе [8], где показано, что развитая конвекция, формирующая континентальную литосферу, является нестационарной, а характерная скорость деформации в мантии оценивается как $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-13} c^{-1}$. Нестационарность проявляется в виде пульсаций, продолжительность которых ($10^7 \div 10^8$ лет) значительно превосходит глубину памяти $t_M = \varepsilon_{tr}/\dot{\varepsilon} \approx 10^4$лет. Таким образом, скорость основного конвективного течения остается постоянной на глубине памяти. В рамках наследственной реологической модели, используемой в настоящей работе, конвективное течение, полученное в [8], является квазистационарным и адекватно описывается реологической моделью степенно́й жидкости. Сказанное относится не только к работе [8], но и ко всем другим численным экспериментам (см., например, [9]), в которых модель степенно́й жидкости используется при рассмотрении нестационарной конвекции в мантии. В этих работах, в отличие от [8], не даются оценки скоростей деформаций, но приводимые авторами результаты численных экспериментов позволяют считать полученные конвективные течения квазистационарными.

Для нестационарной мантийной конвекции, которой соответствует оценка $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-13}c^{-1}$, при $\varepsilon_{tr} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ получаем более низкую оценку для глубины памяти $t_M \approx 3 \cdot 10^{11}c \approx 10^4$лет по сравнению с той, которая соответствует стационарной конвекции. При такой оценке можно считать, что условие квазистационарности (42) для послеледниковых течений выполняется, а послеледниковые течения описываются тензором вязкости с компонентами (41).

Как показано в работе [5], в двумерной задаче о послеледниковых течениях эффективная вязкость определяется соотношением

$$\eta_{pg} = (\eta_N \eta_S)^{1/2}. \tag{51}$$

Поскольку $\eta_N \gg \eta_S$, из (51) следует, что $\eta_{pg} \gg \eta_S$. Таким образом, горизонтальное сдвиговое течение, вызванное тепловой конвекцией, характеризуется вязкостью $\bar{\eta} = \eta_S$, а наложенное на это основное течение послеледниковое течение характеризуется вязкостью η_{pg}, которая значительно выше, чем конвективная вязкость $\bar{\eta} = \eta_S$. При решении задачи в трехмерной постановке следует учитывать различие вязкостей для наложенных послеледниковых течений вдоль оси x, направление которой определяет основное конвективное течение, и вдоль оси y. Учет трехмерности приводит к появлению дополнительного численного множителя в правой части равенства (51), но вывод о том, что η_{pg} значительно выше, чем конвективная вязкость $\bar{\eta}$, остается в силе.

Рассматриваемая здесь анизотропия ($A_N \gg A_S$) связана с анизотропией дислокационного механизма ползучести в кристалле (скольжение дислокаций и переползание дислокаций) и поворотом кристаллических зерен в направлении основного конвективного течения. Если бы анизотропии не было, то при достаточно больших деформациях, вызываемых основным конвективным течением, вязкость, которая характеризует послеледниковые течения, совпадала бы с вязкостью, характеризующей основное конвективное течение. Эффект анизотропии приводит к тому, что послеледниковая вязкость η_{pg} выше, чем конвективная вязкость $\bar{\eta} = \eta_S$.

Итак, при больших скоростях деформаций, вызванных нестационарной турбулентной конвекцией, послеледниковые течения, как и основное конвективное течение, описываются степенно́й реологической моделью, но высокочастотные колебания ($\omega t_M \gg 1$) описываются моделью Андраде (24). Реологическая анизотропия (39) приводит к анизотропному затуханию сейсмических волн, при рассмотрении которого необходимо учитывать упругость среды.

7. Роль диффузионной ползучести

Если бы реология мантии определялась только дислокационной ползучестью, эффективная вязкость мантии при стационарном течении имела вид

$$\bar{\eta}_{\text{disl}} = \frac{1}{2B\bar{\sigma}^2}, \tag{52}$$

где

$$1/B = (1/B_\infty) \exp\left(\frac{a_{\text{disl}} T_m}{T}\right),$$

причем в силу соотношения (16) между A и B можно считать, что $a_{\text{disl}} = 3a$, где параметр a введен в формуле (18) для неустановившейся ползучести Андраде (если $m \neq 1/3$, то соотношение принимает вид $a_{\text{disl}} = a/m$).

В мантии, помимо дислокационного, действует и диффузионный микромеханизм ползучести. Диффузионная вязкость определяется как

$$\eta_{\text{diff}} = d^p C_{\text{diff}} \exp\left(\frac{a_{\text{diff}} T_m}{T}\right), \tag{53}$$

где d – размер кристаллических зерен, C_{diff} – реологический параметр, показатель степени оценивается как $p = 2.5$. При одновременно действующих дислокационном и диффузионном механизмах ползучести вязкость определена соотношением

$$1/\eta = 1/\eta_{\text{diff}} + 1/\eta_{\text{disl}}. \tag{54}$$

Следовательно, если вязкость, связанная с одним из двух микромеханизмов, значительно ниже, чем другая, то именно эта относительно малая вязкость и определяет ползучесть.

Таким образом, как следует из (54), диффузионная ползучесть доминирует при стационарной конвекции в мантии, если

$$\eta_{\text{diff}} \ll \eta_{\text{disl}}. \tag{55}$$

Подставляя (52) и (53) в (55), получаем

$$2B_\infty d^p C_{\text{diff}} \bar{\sigma}^2 \exp\left(\frac{(a_{\text{diff}} - a_{\text{disl}})\, T_m}{T}\right) \ll 1. \tag{56}$$

Соотношение, связывающее вторые инварианты тензоров девиаторных напряжений и скоростей деформаций в случае диффузионной ползучести, имеет вид

$$\bar{\sigma} = 2\eta_{\text{diff}}\dot{\bar{\varepsilon}}. \tag{57}$$

Как следует из (53) и (57), в случае диффузионной ползучести справедливо соотношение

$$\bar{\sigma} = 2d^p C_{\text{diff}} \exp\left(\frac{a_{\text{diff}} T_m}{T}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}. \tag{58}$$

Подставляя (58) в (56), записываем условие доминирования диффузионной ползучести в виде

$$\left(2C_{\text{diff}} d^p\right)^3 B_\infty \dot{\bar{\varepsilon}}^2 \exp\left(\frac{\left(3a_{\text{diff}} - a_{\text{disl}}\right) T_m}{T}\right) \ll 1. \tag{59}$$

Нетрудно показать, что при доминировании дислокационной ползучести левая часть неравенства (59) значительно больше единицы.

В работе [10] приводятся следующие оценки: $a_{\text{diff}} = 17$ и $a_{\text{disl}} = 31$ для верхней мантии, состоящей в основном из оливина, $a_{\text{diff}} \approx 10$ и $a_{\text{disl}} \approx 10 \div 18$ для нижней мантии, которая отличается от верхней химическим составом. Размер зерна порядка $2 \cdot 10^{-3}$м для верхней мантии и 10^{-3}м для нижней мантии. Если для нижней мантии принять оценку $a_{\text{disl}} \approx 10$, то значение параметра $3a_{\text{diff}} - a_{\text{disl}} = 20$ как для верхней, так и для нижней мантии. Поэтому предположение Карато [10, 11] о том, что нижняя мантия обладает диффузионной ползучестью, а верхняя – дислокационной, основывается в первую очередь на различии в размерах зерен: в верхней мантии характерный размер зерна в 2 раза больше, чем в нижней. Если в нижней мантии условие (59) выполняется и доминирует диффузионная ползучесть, то в верхней мантии, где параметр d^{3p} на два порядка выше, доминирует дислокационная ползучесть.

Там, где основное конвективное течение связано с диффузионной ползучестью, анизотропии нет, поскольку при диффузионном механизме ползучести кристаллические зерна не обладают вязкой анизотропией. Анизотропное затухание сейсмических волн происходит только на тех глубинах, где основное течение связано с дислокационной ползучестью.

Считая, что в верхней мантии – дислокационная ползучесть, а в нижней – диффузионная, Кристенсен [5] объясняет следующее противоречие: при конвекции вязкость верхней мантии значительно ниже, чем вязкость нижней мантии, а вязкость, определяемая по послеледниковым движениям, почти однородна по всей глубине мантии. Объяснение состоит в том, что в нижней мантии с диффузионной ползучестью конвективная и послеледниковая вязкости равны друг другу, а в верхней мантии с дислокационной ползучестью, как следует из (51), послеледниковая вязкость значительно выше, чем конвективная.

Заключение

Сейсмические волны, послеледниковые движения и другие процессы, происходящие в мантии, вызывают деформации, малые по сравнению с деформациями, обусловленными тепловой конвекцией в мантии. Поэтому конвективное течение можно рассматривать как основное течение в мантии, на которое наложены другие течения. Важнейшей характеристикой основного течения является глубина памяти: деформации, которые существовали до момента времени, определяемого глубиной памяти, не влияют на напряжение в текущий момент.

В рамках реологической модели, рассматриваемой в этой работе, течения, у которых характерный период изменения скорости значительно превышает глубину памяти (такие течения названы квазистационарными), описываются анизотропной моделью степенно́й жидкости, а течения, характерный период которых значительно меньше глубины памяти, описываются анизотропной моделью Андраде.

Численные эксперименты, в которых использована реологическая модель степенно́й жидкости, показали, что тепловая конвекция в мантии является нестационарной. Нестационарность проявляется в виде пульсаций, наложенных на стационарное конвективное течение. В рамках используемой нами реологической модели, обладающей памятью, найденное в численных экспериментах нестационарное конвективное течение можно рассматривать как квазистационарное, поскольку характерная продолжительность пульсаций значительно превосходит глубину памяти. Если бы пульсации были значительно короче, использование модели степенно́й жидкости для описания нестационарной конвекции в мантии было бы незаконным.

Нестационарная конвекция вызывает деформации в мантии, которые значительно превышают деформации, связанные со стационарной конвекцией, и приводят к меньшей глубине памяти. Поэтому, если послеледниковые течения (их характерный период порядка десяти тысяч лет), наложенные на стационарное конвективное течение, описываются реологической моделью Андраде, то при нестационарной конвекции, которая реализуется в мантии, послеледниковые течения, как и нестационарное конвективное течение, на которое они наложены, являются квазистационарными и описываются моделью анизотропной степенно́й жидкости.

Дислокационная ползучесть и связанная с ней анизотропия имеют место только в верхней мантии. В нижней мантии, повидимому, доминирует диффузионная ползучесть, которая не связана с анизотропией.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-05-64242 РФФИ).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Durham W. B., Goetze C.* Plastic flow of oriented single crystals of olivine // J. Geophys. Res. 1977. Vol.82. P.5737–5753.
2. *Birger B.I.* Rheology of the Earth and thermoconvective mechanism for sedimentary basins formation // Geophys. J. Inter. 1998. Vol.134. P.1–12.
3. *Пуарье Ж.- П.* Ползучесть кристаллов. Механизмы деформации металлов, керамики и минералов при высоких температурах. М.: Мир, 1988. 287 с.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
5. *Christensen U.R.* Some geodynamical effects of anisotropic viscosity // Geophys. J. Inter. 1987. Vol.91. P.711–736.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953. 788 с.
7. *Birger B.I.* Rheology of the Earth's mantle and geodynamical processes // Geophys. Res. Lett. 1991. Vol.18. P.2031–2034.
8. *Dumolin C., Doin M.-P., Fleitout L.* Heat transport in stagnant lid convection with temperature- and pressure-dependent Newtonian or non-Newtonian rheology // J. Geophys. Res. 1999. Vol.104. P.12759–12777.
9. *Christensen U.R., Yuen D.A.* Time dependent convection with non-Newtonian rheology // J. Geophys. Res. 1989. Vol.94. P.814–820.
10. *McNamara A.K., van Keken P.E., Karato S.* Development of finite strain in the convecting lower mantle and its implications for seismic anisotropy // J. Geophys. Res. 2003. Vol.108. No.B5, 2230, doi: 10.1029/2002JB001970.
11. *Karato S., Wu P.* Rheology of the upper mantle: a synthesis // Science. 1993. Vol.260. P.771–778.