

УДК 550.311

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

О.Д. ВОЕВОДА

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

В работе обсуждается простейшая модель Земли. Проведен анализ уравнений ее движения. Сделаны сравнительные оценки влияния на эти движения различных силовых воздействий.

EQUATIONS OF MOTION FOR A SIMPLE EARTH'S MODEL

O.D. VOEVODA

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

This paper discusses equations of motion for the simple model of a self-gravitating and rotating Earth. Also discussed are some geodynamical applications of the equations.

Введение

В работе [1] были сформулированы предположения, которые не противоречат данным наблюдений о движениях Земли. Земля считается массивным вращающимся шарообразным деформируемым телом, которое достаточно удалено от других аналогичных тел. Считается, что в материале тела реализуются малые перемещения, деформации, а напряжения образуют симметричный тензор. Изменение перемещений в единицу времени меньше скорости сейсмических волн. Поверхность тела свободна от напряжений.

В рамках перечисленных предположений в работе [1] были получены уравнения динамики массивного вращающегося деформируемого тела. Движения этого тела формально представлены как совокупность движений недеформируемого (*отсчетного*) тела и тех движений, которые обусловлены способностью материала деформироваться.

Для использования приведенных в работе [1] уравнений в геодинатике в первую очередь необходимо выбрать модель отсчетной Земли. Этот выбор должен удовлетворять следующим требованиям: (1) модель

отсчетной Земли должна быть удобна для формального описания движений реальной Земли, (2) основные характеристики этой модели должны быть определены в терминах наблюдаемых величин.

Из-за ограниченного объема статьи [1] в ней лишь кратко рассмотрен вопрос о физическом обосновании модели отсчетной Земли. Поэтому основной целью настоящей работы является обоснование простейшей модели Земли. Также рассмотрены типичные частные случаи уравнений движения принятой модели Земли и приведены сравнительные оценки влияния на эти движения различных силовых воздействий.

Простейшая модель отсчетной Земли

Земля характеризуется [2]: массой $M = 5.98 \cdot 10^{27}$ г, средним радиусом $r_0 = 6.37 \cdot 10^8$ см, полярным радиусом $r_p = 6.36 \cdot 10^8$ см, экваториальным радиусом $r_e = 6.38 \cdot 10^8$ см. Средняя угловая скорость вращения Земли $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, полярный момент инерции $\mathbf{J}_p = 8.04 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, экваториальные моменты инерции $\mathbf{J}_{e1} \approx \mathbf{J}_{e2} = 8.01 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, а недиагональные компоненты тензора инерции можно считать ненаблюдаемыми величинами.

Внутренняя структура Земли определяется моделью ее строения [2]. Основными элементами этой модели являются: внутреннее ядро ($1.60 \cdot 10^{-2}M$, $0 < r \lesssim 1.17 \cdot 10^8 \text{ см}$), внешнее ядро ($3.10 \cdot 10^{-1}M$, $1.17 \cdot 10^8 \text{ см} < r \lesssim 3.57 \cdot 10^8 \text{ см}$), мантия ($6.70 \cdot 10^{-1}M$, $3.57 \cdot 10^8 \text{ см} < r \lesssim 6.31 \cdot 10^8 \text{ см}$) и кора ($4.35 \cdot 10^{-3}M$, $6.31 \cdot 10^8 \text{ см} < r \lesssim 6.37 \cdot 10^8 \text{ см}$). Распределение плотности в Земле близко к центрально симметричному. Гравитационная постоянная $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \cdot \text{г} \cdot \text{с}^{-2}$.

Фигура Земли очень близка к эллипсоиду вращения, у которого $(r_e - r_p)/r_0 \ll 1$. Из-за наличия рельефа поверхность реальной Земли отличается от поверхности эллипсоида вращения, максимальный перепад высот рельефа Земли $h/r_0 \ll 1$.

Как $(r_e - r_p)/r_0$, h/r_0 , так и \mathbf{u}/r_0 много меньше единицы и в этом смысле величины $(r_e - r_p)$, h и \mathbf{u} неразличимы. Поэтому допустимо считать, что отличие фигуры Земли от шара определяется способностью материала Земли деформироваться.

Для описания движений Земли используем три системы координат. Пусть $\{0, \vec{X}\}$ есть инерциальная система координат, начало которой помещено в некоторую точку пространства (см. рис.). Пусть $\{\mathbf{o}_m, \vec{x}_m\}$ и $\{\mathbf{o}_n, \vec{x}_n\}$ есть неинерциальные системы координат, начала которых совпадают, соответственно, с центром масс реальной и отсчетной Земли (см. рис.). Эти системы координат вращаются вместе с соответствующими телами.

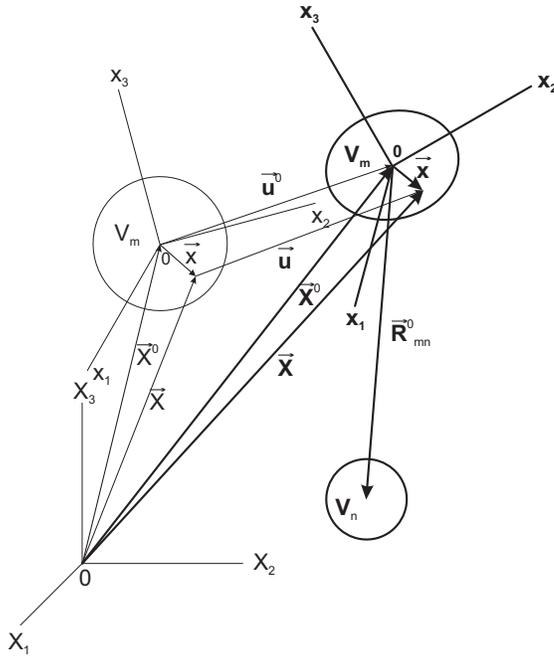


Рис. Система тел и системы координат

Рассмотрим простейшую формальную модель отсчетной Земли.

Масса отсчетной Земли совпадает с массой реальной Земли. Отсчетная Земля является шаром с центрально-симметричным распределением плотности его материала

$$\rho(\vec{x}) = \rho(|\vec{x}|). \quad (1)$$

В этом случае центр масс отсчетной Земли совпадает с ее геометрическим центром, а тензоры инерции отсчетной Земли равны:

$$\hat{J} = J\hat{1}, \quad \hat{I} = 0, \quad (2)$$

где $J = 2 \int_V \rho |\vec{x}|^2 dV$ есть первый инвариант тензора инерции отсчетной Земли.

Формулы (1) и (2) определяют простейшую модель отсчетной Земли. Такую же модель примем для каждого из тел, с которыми взаимодействует Земля.

Предположения (1) и (2) косвенно подтверждаются термодинамическим анализом так называемого равновесного состояния массивных тел [3].

Подставим величины из (2) в соответствующие уравнения динамики недеформируемого тела, которые приведены в работе [1]. В результате получим:

$$M_m \frac{d^2 \vec{X}_m^0}{dt_X^2} = GM_m \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^3} M_n, \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}_m}{dt} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dJ_m}{dt_X} = 0. \quad (5)$$

В формуле (3) M_m есть масса Земли, \vec{X}_m^0 есть вектор положения центра масс отсчетной Земли, \vec{R}_{mn}^0 есть вектор взаимного положения центров масс отсчетной Земли и любого из взаимодействующих с ней тел M_n с номером $n \neq m$, (см. рис.), G есть гравитационная постоянная. В формуле (4) $\vec{\Omega}_m$ есть угловая скорость вращения отсчетной Земли.

Формулы (3)–(5) определяют движения отсчетной Земли. Из уравнения (3) следует, что центр масс отсчетной Земли движется в пространстве так же, как и материальная точка с массой, которая равна массе Земли. Из формул (4) и (5) следует, что ориентация отсчетной Земли неизменна при ее орбитальном движении. Поскольку тензор инерции $\hat{J} = J\hat{1}$ отсчетной Земли есть изотропный тензор, то вектор $\vec{\Omega}$ можно направить вдоль любой из главных осей этого тензора.

Уравнения движения Земли

Выпишем уравнения движения Земли.

Приняв во внимание формулу (4), из уравнения внутренней задачи динамики деформируемого тела [1], получим

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} + 2\rho_m \vec{\Omega}_m \times \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t} + \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{\mathbf{u}}_m) = \\ = \nabla \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \vec{t}_m - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m). \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнении (6) \vec{x} есть вектор положения точки отсчетной Земли относительно ее центра масс, $\vec{\mathbf{u}}_m$ есть вектор перемещений точек материала Земли, а $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_m$ есть тензор напряжений.

Сила \vec{f}_{mm} собственной гравитации Земли и приливообразующая сила \vec{t}_{mm} определяются соответствующими формулами [1]:

$$\vec{f}_{mm} = G\rho_m \int_{V'} \boldsymbol{\rho}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\vec{t}_m = & G \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \rho_m \left(\vec{x}_m \frac{1}{|\vec{R}_{mn}^0|^3} M_n - 3 \vec{x}_m \bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n - \right. \\
& - \frac{3}{2} (\vec{x}_m \bullet \vec{x}_m) \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n - 3 (\vec{x}_m \vec{x}_m) \bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n + \\
& \left. + \frac{15}{2} (\vec{x}_m \vec{x}_m) \bullet \bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7} M_n \right). \quad (8)
\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае приливообразующая сила (8) не зависит от тензоров инерции взаимодействующих с Землей тел. В правой части уравнения (6) все объемные силы имеют потенциал.

Необходимое граничное условие для внутренней задачи динамики Земли определяются формулой: $\hat{\sigma} \bullet \vec{n} = 0$ на S .

Уравнение (6) внутренней задачи динамики Земли определяет мгновенное состояние элементарного объема материала деформируемой Земли. Это состояние реализуется вследствие равномерного вращения отсчетной Земли.

Первое слагаемое в левой части уравнения (6) есть собственно сила инерции элементарного объема Земли. Второе и третье слагаемые в левой части уравнения (6) есть силы инерции, которые обусловлены влиянием вращения отсчетной Земли на перемещение элементарного объема реальной Земли. Первое слагаемое в правой части уравнения (6) есть внутренняя поверхностная сила. Второе и третье слагаемые в правой части уравнения (6) есть, соответственно, внутренняя гравитационная и приливообразующая силы. Четвертое слагаемое в правой части уравнения (6) есть сила инерции, которая определяет изменение положения точки отсчетной Земли при ее вращении.

С учетом условия (2) из уравнения движения центра масс деформируемого тела [1] получим:

$$\begin{aligned}
M_m \frac{d^2 \vec{X}_m^0}{dt_X^2} = & G \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N M_m \left(\frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n - \frac{3}{2} \hat{\mathbf{i}}_m \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n - \right. \\
& \left. - 3 \hat{\mathbf{i}}_m \bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n + \frac{15}{2} \hat{\mathbf{i}}_m \bullet \bullet \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^7} M_n \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

Уравнение (9) определяет орбитальное движение центра масс Земли. Все величины в этом уравнении определены относительно инерциальной системы координат $\{0, \vec{X}\}$. В правой части уравнения (9) присутствуют слагаемые, которые зависят от возмущения $\hat{\mathbf{i}} = \frac{1}{M} \int_V \rho (\vec{x} \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{u}} \vec{x}) dV$ тен-

зора инерции Земли. Эти слагаемые определяют влияние способности материала Земли деформироваться на движение ее центра масс.

Попытка получить уравнение движения центра масс ядра Земли была предпринята А.С. Мониным [4]. В этой работе уравнение движения элементарного объема деформируемого тела было проинтегрировано только по объему ядра Земли. В результате получилось, что для описания движения центра масс ядра Земли необходимо знать напряжения на его границе. Эти напряжения определяют неизвестное влияние движений исключенной из рассмотрения части Земли на движения ее внутреннего ядра. Поэтому, предложенный в работе [4] вывод уравнения движения центра масс ядра Земли нельзя признать конструктивным.

С учетом условий (2), (4), (5) и того, что $\vec{\Omega} \times J\hat{1} = 0$ и $\vec{\omega} \times J\hat{1} = 0$, из соответствующих уравнений вращения деформируемого тела [1] получим:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{V_m} \vec{x} \times \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \vec{\Omega}_m \times \int_{V_m} \vec{x} \times \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV + \vec{\Omega}_m \bullet \frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt} + \\ & + \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \hat{\mathbf{j}}_m) + J_m \frac{d\vec{\omega}_m}{dt} = -3GM_m \hat{\mathbf{i}}_m \times \bullet \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt_X} = \frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt} + \vec{\Omega}_m \times \hat{\mathbf{j}}_m, \quad (11)$$

где

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \frac{1}{V} \int_V \nabla \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV \quad (12)$$

и $\hat{\mathbf{j}} = \int_V \rho (2(\vec{x} \bullet \vec{u})\hat{1} - (\vec{x}\vec{u} + \vec{u}\vec{x})) dV$ есть, соответственно, возмущения угловой скорости вращения Земли и ее тензора инерции.

Уравнение (10) определяет баланс момента импульса реальной (деформируемой) Земли. Все величины в этом уравнении определены относительно неинерциальной системы координат $\{o_m, \vec{x}_m\}$. Соотношение (11) устанавливает связь компонент тензора $\hat{\mathbf{j}}$ (или $\hat{\mathbf{i}}$) в системах координат $\{0, \vec{X}\}$ и $\{o_m, \vec{x}_m\}$.

Уравнения (10)–(12) определяют внешнюю задачу динамики принятой модели Земли. Сила собственной гравитации Земли и реологическая модель ее материала не входят в явном виде ни в одно из уравнений внешней задачи динамики Земли.

Обоснование отсчетной модели Земли

Выясним теперь в каком смысле отсчетное состояние Земли можно понимать как физически определенное. Это необходимо для конструктивного использования полученных выше уравнений в задачах геодинамики.

Определим отсчетную модель Земли в терминах наблюдаемых величин. Для этого воспользуемся понятием "среднее по времени движение", которое применяется при анализе возмущений орбитального движения небесных тел [5].

Из наблюдений следует, что абсолютная величина и направление вектора угловой скорости $\vec{\Omega}_m = \vec{\Omega}_m + \vec{\omega}_m$ вращения Земли испытывают ограниченные изменения относительно некоторых средних значений [6–8]. Эти изменения таковы, что правдоподобно выполнение следующего условия:

$$\langle \vec{\omega}_m \rangle_{\Delta t} = 0. \quad (13)$$

Символ $\langle \rangle_{\Delta t}$ означает среднее по некоторому интервалу времени Δt значение соответствующей величины. Если равенство (13) справедливо, то

$$\vec{\Omega}_m = \langle \vec{\Omega}_m \rangle_{\Delta t} = \text{const}. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) определяют вектор $\vec{\Omega}_m$ угловой скорости вращения отсчетной Земли как, в принципе, измеряемую, т.е. физически определенную величину. Эти же формулы отражают тот факт, что реальная Земля как целое в среднем вращается стационарно.

Выше было отмечено, что уравнение (6) внутренней задачи динамики Земли является первичным объектом исследования. Предположим, что известны реологическая модель материала Земли, модель ее строения, угловая скорость вращения отсчетной Земли, приливообразующая сила и начальные условия для вектора перемещений. Тогда, в принципе, можно найти решение внутренней задачи, т.е. определить вектор перемещений \vec{u} материала Земли. Далее можно найти возмущения угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения Земли и ее тензора инерции \hat{i} (или \hat{j}). После этого первый инвариант J_m тензора инерции отсчетной Земли, в принципе, может быть найден из уравнения (10).

Из изложенного следует, что отсчетное состояние Земли, в принципе, можно считать физически определенным.

Усредним уравнение движения (9) центра масс реальной Земли по некоторому интервалу времени Δt . В результате получим уравнение, которое определяет среднее по времени движение центра масс Земли.

Это уравнение должно совпадать с уравнением (3) движения Земли как материальной точки. Такое совпадение возможно при

$$\langle \hat{\mathbf{i}}_m \rangle_{\Delta t} = 0. \quad (15)$$

Для соблюдения условий (13) и (15) необходимо, чтобы $\langle \bar{\mathbf{u}} \rangle_{\Delta t} = 0$ и $\langle \partial \bar{\mathbf{u}} / \partial t \rangle_{\Delta t} = 0$. Эти равенства определяют характер средних по времени движений материала Земли.

Условия (14) и (15) позволяют оценить интервал Δt по данным наблюдений за движениями Земли путем усреднения по времени траектории орбитального движения Земли и угловой скорости ее вращения.

По-видимому, интервал времени Δt должен быть не меньше периода оборота Земли вокруг Солнца (1 год) и не больше периода прецессии орбиты Земли (26 тыс. лет). Следует ожидать, что в течение такого интервала времени реализуются все возможные состояния материала Земли.

До того как правдоподобное предположение (13) не опровергнуто экспериментом, нет необходимости отказываться от принятой выше простейшей модели Земли. Если указанное предположение будет опровергнуто экспериментом, то это может свидетельствовать о наличии некоторой причины, под влиянием которой положение центра масс Земли и угловая скорость ее вращения систематически отклоняются от их средних по времени значений.

Заметим, что возмущение $\bar{\omega}$ (12) угловой скорости вращения Земли можно представить в виде:

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{2} \frac{1}{V} \int_S \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \times \bar{n} dS. \quad (16)$$

Формула (16) определяет $\bar{\omega}$ через измеряемые величины $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}$, $\partial \bar{\mathbf{u}}$, S и V .

Заметим, что если усреднить по интервалу времени Δt приведенные в работе [1] уравнения внешней задачи динамики массивного вращающегося деформируемого тела, то с учетом условий (13) и (15) получим уравнения внешней задачи динамики недеформируемого тела [1]. Это значит, что рассмотренную Н. Киношита [9, 10] модель Земли как недеформируемого тела можно использовать для описания только средних по времени движений реальной Земли.

Полученные выше уравнения динамики Земли совместно определяют возможные движения Земли, которые обусловлены процессами, характерная скорость которых меньше скорости сейсмических волн. Этому условию удовлетворяют все возможные движения Земли. Все уравнения полностью согласованы друг с другом, а входящие в них величины опре-

делены относительно одного и того же отсчетного состояния. Это состояние определено как среднее по времени состояние реальной Земли, т.е. его, в принципе, можно считать физически реализуемым.

Быстрые и медленные движения материала Земли

Среди всех возможных движений материала Земли можно выделить такие движения, характерная длительность Δt которых много меньше или много больше периода T вращения Земли, назовем эти движения, соответственно, быстрыми и медленными. Быстрые движения, в основном, проявляются в очаге землетрясения, медленные движения проявляются, например, как дрейф континентов и изменение рельефа Земли.

Найдем уравнения динамики Земли при быстрых ($\Delta t/T \ll 1$) движениях ее материала. Характерная скорость таких движений $\mathbf{u}/\Delta t \gg \mathbf{u}/T$.

В этом случае в уравнении (6) внутренней задачи следует пренебречь теми слагаемыми, которые зависят от угловой скорости вращения отсчетной Земли. В результате получим:

$$\rho_m \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}_m}{\partial t^2} = \nabla \bullet \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m + \vec{f}_{mm} + \vec{t}_m. \quad (17)$$

При быстрых движениях материала Земли уравнение движения ее центра масс совпадает с уравнением (9).

Уравнения (10) и (11) вращения Земли при быстрых движениях ее материала принимают вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m} \vec{x} \times \rho \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} dV + J_m \frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}_m}{dt} = -3GM_m \hat{\mathbf{i}}_m \times \bullet \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n, \quad (18)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt_X} = \frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt}. \quad (19)$$

Уравнения (10), (17)–(19) описывают динамику Земли при быстрых движениях ее материала. Угловая скорость вращения отсчетной Земли не входит ни в одно из этих уравнений. Поэтому в среднем стационарное вращение Земли как целого практически не влияет на быстрые движения ее материала. Однако такие движения влияют на соответствующие возмущения угловой скорости вращения $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ Земли и ее тензора инерции $\hat{\mathbf{i}}$ (или $\hat{\mathbf{j}}$).

Найдем уравнения динамики Земли при медленных ($T/\Delta t \ll 1$) движениях ее материала. Характерная скорость таких движений $\mathbf{u}/\Delta t \ll \mathbf{u}/T$.

В этом случае в уравнении (6) внутренней задачи также можно пренебречь соответствующими слагаемыми. В результате получим:

$$\rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{u}_m) = \nabla \bullet \hat{\sigma}_m + \vec{f}_{mm} + \vec{t}_m - \rho_m \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \vec{x}_m). \quad (20)$$

При медленных движениях материала Земли уравнение движения ее центра масс совпадает с уравнением (9).

Уравнения (10) и (11) вращения Земли как целого при медленных движениях ее материала принимают вид

$$\vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \bullet \hat{\mathbf{j}}_m) = -3GM_m \hat{\mathbf{i}}_m \times \bullet \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^N \frac{\vec{R}_{mn}^0 \vec{R}_{mn}^0}{|\vec{R}_{mn}^0|^5} M_n, \quad (21)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{j}}_m}{dt_X} = \vec{\Omega}_m \times \hat{\mathbf{j}}_m. \quad (22)$$

Уравнения (10), (20)–(22) описывают динамику Земли при медленных движениях ее материала. Угловая скорость $\vec{\Omega}$ вращения отсчетной Земли влияет на медленные движения ее материала. При медленных движениях материала Земли двенадцать уравнений (10), (21), (22) внешней задачи динамики Земли образуют полную систему относительно двенадцати неизвестных величин \vec{X}_m^0 , $\vec{\Omega}_m$, $\hat{\mathbf{i}}_m$ (или $\hat{\mathbf{j}}_m$).

Уравнение (21) совпадает с уравнением так называемого перманентного вращения асимметричного тела [11]. Это уравнение определяет возмущение тензора инерции реальной Земли при стационарном вращении отсчетной Земли в гравитационном поле взаимодействующих с ней тел.

Баланс энергии в Земле

Для принятой модели Земли в уравнении баланса энергии деформируемого тела [12] следует положить $\vec{\Omega}_m \bullet \hat{\mathbf{j}}_m \bullet \vec{\Omega}_m = |\vec{\Omega}_m|^2 J_m$. В результате получим уравнение баланса энергии в принятой модели Земли:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\vec{\Omega}_m|^2 J_m \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{\Omega}_m \bullet \hat{\mathbf{j}}_m \bullet \vec{\Omega}_m \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{V_m} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \bullet \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV \right) = \\ & = - \int_{V_m} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} \bullet \bullet \hat{\sigma} dV - \int_{V_m} (\vec{\Omega}_m \times \hat{\varepsilon}) \bullet \bullet \hat{\sigma} dV + \frac{d}{dt} \left(\vec{\Omega}_m \bullet \int_{V_m} \vec{x} \times \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV \right) + \\ & + \frac{d}{dt_X} \left(\vec{\Omega}_m \bullet \int_{V_m} \vec{u} \times \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dV \right) + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \vec{u} \bullet \vec{f}_{mm} dV + \\ & + \vec{\Omega}_m \bullet \int_{V_m} \vec{u} \times \vec{f}_{mm} dV + \frac{d}{dt} \int_{V_m} \vec{u} \bullet \vec{t}_m dV + \vec{\Omega}_m \bullet \int_{V_m} \vec{u} \times \vec{t}_m dV. \quad (23) \end{aligned}$$

Рассмотрим левую часть уравнения (23). Первое слагаемое есть изменение в единицу времени кинетической энергии вращения отсчетной Земли. Второе слагаемое есть изменение в единицу времени той части (возмущения) кинетической энергии вращения Земли, которая связана со способностью ее материала деформироваться. Третье слагаемое есть изменение в единицу времени собственно кинетической энергии материала Земли.

Таким образом, левая часть уравнения (23) есть изменение в единицу времени полной кинетической энергии Земли.

Рассмотрим правую часть уравнения (23). Первое и второе слагаемые есть суммарное изменение в единицу времени, так называемой, внутренней энергии материала Земли. Это изменение реализуется вследствие способности материала вращающейся Земли деформироваться. Первое и второе слагаемые в правой части уравнения баланса энергии ответственны за возможную диссипацию энергии. Физический механизм диссипации определяется реологической моделью материала Земли. Третье и четвертое слагаемые есть суммарное изменение в единицу времени момента сил инерции материала Земли при изменении мгновенного положения точек её материала. Пятое и шестое слагаемые есть суммарное изменение в единицу времени работы силы собственной гравитации Земли при изменении мгновенного положения точек ее материала. Седьмое и восьмое слагаемые есть суммарное изменение в единицу времени работы приливообразующей силы при изменении мгновенного положения точек материала Земли.

Таким образом, правая часть уравнения (23) есть сумма мощностей всех силовых воздействий на Землю.

Из изложенного следует, что уравнение (23) определяет баланс энергии при движениях массивной вращающейся деформируемой Земли. Это уравнение устанавливает следующий факт: изменение в единицу времени полной кинетической энергии Земли равно сумме мощностей всех силовых воздействий на Землю.

Найдем теперь средние напряжения в принятой модели Земли. Для этого используем приведенное в работе [12] уравнение, которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\langle \hat{\sigma}_m \rangle_v = \frac{1}{V_m} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \hat{\mathbf{i}}_m}{dt^2} + \vec{\Omega}_m \times \frac{d\hat{\mathbf{i}}_m}{dt} + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_m \times (\vec{\Omega}_m \times \hat{\mathbf{i}}_m) \right). \quad (24)$$

Формула (24) устанавливает связь тензора средних напряжений в Земле с вектором угловой скорости вращения отсчетной Земли, возмущением тензора инерции Земли и его производными по времени.

Сила собственной гравитации Земли и приливообразующие силы непосредственно не влияют на тензор средних напряжений в Земле. Это значит, что эти силы вызывают в Земле напряжения, средние по объему значения которых равны нулю. Такой же результат следует из решения внутренней задачи о деформировании упругого однородного шара под действием его собственной гравитации [13].

Полученные уравнения позволяют оценить степень влияния силовых воздействий на движения Земли. Численные значения основных характеристик Земли были приведены выше.

Полярный момент инерции $\mathbf{J}_p = 8.04 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, экваториальные моменты инерции $\mathbf{J}_e = 8.01 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Пусть в отсчетном состоянии $I = (2\mathbf{I}_e + \mathbf{I}_p)/3$. Тогда $\mathbf{i} = \mathbf{I}_e - I$. Порядок возмущения тензора инерции $\mathbf{i} \sim 10^{42} \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Из уравнения (9) следует, что возмущение движения центра масс деформируемой Земли относительно движения центра масс отсчетной Земли определяется отношением $\mathbf{i}/I \sim 10^{-2}$.

Соотношение (23) позволяет оценить влияние (мощность) силовых воздействий на движения материала Земли. В качестве характерной единицы времени выберем величину $T = 2\pi/\Omega$ периода обращения Земли относительно своего центра масс. Естественно, что такой выбор даст только очень грубые оценки соответствующих величин.

Величины первого $K_{\text{rot}} \sim \Omega^2 J$ и второго $\mathbf{k}_{\text{rot}} \sim \Omega^2 \mathbf{j}$ слагаемых в левой части соотношения (23) связаны формулой $\mathbf{k}_{\text{rot}} \sim 10^{-2} K_{\text{rot}}$. Это значит, что часть кинетической энергии вращения Земли, которая связана со способностью ее материала деформироваться, существенно меньше кинетической энергии вращения отсчетной (недеформируемой) Земли.

Величины третьего $\mathbf{p}_3 \sim rM\Omega^2 \mathbf{u}$ и четвертого $\mathbf{p}_4 \sim \mathbf{u}^2 M\Omega^2$ слагаемых в правой части соотношения (23) связаны формулой $\mathbf{p}_4 \sim 10^{-3} \mathbf{p}_3$. Это значит, что работа сил инерции, которая связана со способностью материала Земли деформироваться, существенно меньше работы этих же сил при вращении отсчетной Земли.

Величины шестого $\mathbf{p}_6 \sim \Omega V \mathbf{u} f_{mm}$ и восьмого $\mathbf{p}_8 \sim \Omega V \mathbf{u} t_m$ слагаемых в правой части соотношения (23) связаны формулой $\mathbf{p}_6 \sim \mathbf{p}_8 (t_m/f_{mm})$, где $t_m/f_{mm} \ll 1$. Это значит, что работа приливообразующей силы на перемещения материала Земли существенно меньше аналогичной работы силы собственной гравитации Земли.

Из приведенных сравнительных оценок численных значений величин в уравнении баланса энергии Земли следует, что способность материала Земли деформироваться, вообще говоря, слабо влияет на изменение положения и ориентации Земли в пространстве. Это подтверждает правомерность приближений, которые были использованы Х. Киношита для

решения задачи описания ориентации Земли в пространстве в рамках модели недеформируемого тела [9–11].

Формула (24) позволяет оценить величину средних напряжений в Земле $\langle \sigma \rangle_V \sim \frac{1}{2V} \Omega^2 \mathbf{i}$. Объем Земли $V = 1.10 \cdot 10^{27} \text{ см}^3$, угловая скорость вращения $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, полярный момент инерции $C = 8.04 \times 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, экваториальные моменты инерции $A = B = 8.01 \cdot 10^{44} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, а недиагональные компоненты тензора инерции можно считать ненаблюдаемыми величинами. Пусть в отсчетном состоянии $I = (2\mathbf{I}_e + \mathbf{I}_p)/3$. Тогда $\mathbf{i} = \mathbf{I}_e - I$. Порядки величин возмущения тензора инерции Земли и средних напряжений в ней равны: $\mathbf{i} \sim 10^{42} \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $\langle \sigma \rangle_V \sim 10^6 \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}$. Порядок величины модулей упругости материала Земли $\mathbf{c} \sim (10^{11} - 10^{12}) \text{ дин/см}^2$. Сравнив величину средних напряжений в Земле с величиной модулей упругости ее материала, получим: $\langle \sigma \rangle_V \sim (10^{-5} - 10^{-6}) \mathbf{c}$.

Основные результаты и выводы

Сформулирована простейшая модель отсчетной Земли. Получена система уравнений внутренней и внешней задач динамики Земли. Получено уравнение баланса механической энергии Земли. Получено уравнение, которое связывает тензор средних напряжений в Земле с угловой скоростью ее вращения и возмущением тензора инерции. Проведена сравнительная оценка значимости различных силовых воздействий на Землю.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Движения Земли как целого можно формально представить как совокупность движений отсчетной Земли и тех движений, которые обусловлены способностью материала Земли деформироваться.

2. В отсчетном состоянии Земля есть массивный стационарно вращающийся шар с центрально симметричным распределением плотности. Движение центра масс отсчетной Земли совпадает с движением материальной точки такой же массы. Отсчетное состояние Земли определено как среднее по времени состояние реальной Земли и его, в принципе, можно считать физически определенным.

3. Уравнение внутренней задачи динамики Земли является первичным объектом исследования. Решение этого уравнения позволяет определить влияние способности материала Земли деформироваться на ее движения как целого. Уравнения внешней задачи динамики Земли определяют те движения материала Земли, которые могут реализоваться в реальности.

4. В среднем стационарное вращение Земли как целого практически не влияет на быстрые движения ее материала. Однако указанное вращение влияет на медленные движения материала Земли.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 03-05-64320 РФФИ и 04-05-64449 РФФИ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Воевода О.Д. Уравнения движения Земли // Анализ геодинамических и сейсмических процессов. М.: ГЕОС, 2004. С.107–137. (Вычисл. сейсмология; Вып.35).
2. Буллен К.Е. Плотность Земли. М.: Мир, 1978. 442 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.5. Статистическая физика. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
4. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Л.: Гидрометеозд, 1988. 424 с.
5. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию М.: Физматмет, 1968. 800 с.
6. Мунк В., Макдоналд Г. Вращение Земли: геофизические приложения. М.: Мир, 1960. 323 с.
7. Мориц Г., Мюллер А. Вращение Земли: теория и наблюдения. Киев: Наукова думка, 1992. 512 с.
8. Сидоренков Н.С. Физика неустойчивостей вращения Земли. М.: Физматлит, 2002. 380 с.
9. Kinoshita H. Theory of the rotation of the rigid Earth // *Celest. Mech.* 1977. Vol.15. P.277–326.
10. Kinoshita H., Souchay J. The theory of the nutation for the rigid Earth. Model at the second order // *Celest. Mech. Dynamical Astron.* 1990. Vol.48. P.187–265.
11. Магнус К. Гироскоп: теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
12. Воевода О.Д. Об уравнениях движения Земли II. Средние напряжения и баланс энергии // Проблемы теоретической сейсмологии и сейсмичности. М.: ГЕОС, 2002. С.293–310. (Вычисл. сейсмология; Вып.33).
13. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Физматлит, 1970. 939 с.