

УДК 550.34; 550.311

**О ПРОСТРАНСТВЕННОМ МАСШТАБИРОВАНИИ
ИНТЕНСИВНОСТИ СЕЙСМИЧЕСКИХ СОБЫТИЙ**

Г.М.МОЛЧАН, Т.Л. КРОНРОД

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Для проверки подобия сейсмического процесса интенсивность числа событий магнитуды $M \geq m$ на площадке размера L представляют в виде $\lambda_L = a_L 10^{-bm} L^c$. В рамках мультифрактальной гипотезы оптимальный выбор параметра c не однозначен. Показано, как разные c связаны с разными типами осреднения λ_L по пространству и при каких c распределения a_L согласованы наилучшим образом при малых L . Теоретические выводы проверяются на реальной сейсмичности Калифорнии.

ON THE SPATIAL SCALING OF SEISMICITY RATE

G.M. MOLCHAN, T.L. KRONROD

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

Scaling analysis of seismicity in the space-time-magnitude domain very often starts from the relation $\lambda(m, L) = a_L 10^{-bm} L^c$ for the rate of seismic events of magnitude $M \geq m$ in an area of size L . There is some evidence in favor of multifractality being present in seismicity. In this case the optimal choice of the scale exponent c is not unique. It is shown how different c 's are related to different types of spatial averaging applied to $\lambda(m, L)$ and what are the c 's for which the distributions of a_L best agree for small L . Theoretical analysis is tested using California data.

Введение

Классические законы сейсмичности, а именно – закон Омори для афтершоков и закон Гутенберга–Рихтера (GR) для энергии землетрясений, отражают одномерные свойства самоподобия сейсмического процесса. Работы последнего времени [1–6] связаны с поисками аналогичных свойств землетрясений в многомерном фазовом пространстве: место–время–магнитуда. Полученные закономерности на этом пути существенно меняют устоявшиеся представления о сейсмичности и поэтому требуют анализа и проверки.

В пионерской работе Бака и др. [3] речь идет о распределении времени τ_L между последовательными событиями магнитуды $M > m$ в ячейке $L \times L$. Усредняя эмпирические распределения τ_L по всем $L \times L$ ячейкам решетки, покрывающей сейсмогенную зону G , авторы нашли, что

$$P\{\tau_L < t\} = F_\tau(t\lambda_L), \quad (1)$$

где F_τ – унифицированная (не зависящая от m и L) функция, а λ_L есть мера числа событий $M > m$ на единицу времени в ячейке $L \times L$. Вклад каждой ячейки в усреднение пропорционален числу указанных событий в ячейке. Для λ_L используется следующее представление:

$$\lambda_L = a10^{-bm}L^c, \quad (2)$$

где b – параметр наклона в законе Гутенберга–Рихтера, а показатель степени c ассоциируется с фрактальной размерностью эпицентров землетрясений, т.е. $0 \leq c \leq 2$.

Соотношение (2), по-видимому, впервые предложено Кейлис-Бороком и др. [7] как обобщение GR-закона для “типичной” области размера L в условиях фрактальной геометрии сейсмических событий. В этом качестве соотношение (2) вызывает ряд вопросов:

- почему параметр c не зависит от порога m ?
- если c – фрактальная размерность, то какая именно?

Имеется целое однопараметрическое семейство так называемых размерностей Реньи, или обобщенных размерностей в терминологии Грасбергера-Проккача [8], d_q , $q \geq 0$. Из них особенно популярны корреляционная размерность d_2 и емкостная/боксовая размерность d_0 . В работе [7], а также в ее продолжении [9], процедура оценивания показателя c ведет к корреляционной размерности, хотя мотивация соотношения (2) основана на боксовой размерности. Имеются работы, где соотношение (2) используется для одних и тех же целей и в одной и той же области (Калифорния), но с разными показателями c : $d_2 = 1.2$ и $d_0 = 1.6$ (см. работы Бака [3], Коррала [4] или работы Baiesi, Paszusi [2] и [10]).

Ситуация усложняется, если принять во внимание аргументы Писаренко, Голубевой [11]. Эти авторы исходят из гипотезы самоподобия сейсмичности в пространстве–времени и строят модель, в которой события магнитуды $M > m$ образуют Пуассоновский поток в любой подобласти A региона G со случайным параметром интенсивности $\lambda(A)$. Точнее, функция множества $\lambda(A)$ есть реализация случайной меры Леви, т.е. меры с независимыми приращениями и устойчивым распределением индекса $0 < \alpha < 1$. Случай $\alpha \geq 1$ невозможен в силу

положительности $\lambda(A)$. В этой модели для каждой ячейки $L \times L$ имеем

$$\lambda(L \times L) = a_L 10^{-bm} L^c, \quad (3)$$

где $c = 2/\alpha > 2$. Формальное осреднение (3) по ячейкам должно вести к соотношению (2) со средним параметром a . Согласно [11] для Южной Калифорнии $\alpha = 0.57$, что дает крайне непривычное значение $c = 3.5$. Из модели следует, что ансамбль $\{a_L\}$ подчиняется унифицированному распределению, а именно – устойчивому распределению Леви индекса $\alpha < 1$. Поэтому $P(a_L > x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \gg 1$. Но тогда a_L не имеет обычного среднего и значит параметр a из (2) в рамках рассматриваемой модели может терять смысл.

Описанная модель интересна тем, что подсказывает более гибкую, чем (2), форму обобщенного закона повторяемости. Он определяется соотношением (3) с унифицированным распределением ансамбля нормированных величин $\lambda(L \times L)/\lambda_L$, т.е. имеет место точное равенство

$$P\{\lambda(L \times L) < x\} = F_\lambda(x/\lambda_L), \quad (4)$$

с унифицированной функцией F_λ . Это обстоятельство нетривиально, поскольку сходное соотношение (1) может быть только приближенным. Если закон (1) точный, тогда пространственная интенсивность событий с $M > t$ в зоне G должна быть постоянной (см. [12]).

Коррал [4] независимо пришел к соотношению (4) в Калифорнии при фиксированном показателе $c = 1.6$. Он получил $F_\lambda(x) = 0(x^{-1.2})$, $x \gg 1$, что отличается от описанной модели, где $F_\lambda(x) = 0(x^{-0.57})$ и $c = 3.5$.

Таким образом, вопрос о выборе подходящего показателя c для получения унифицированных законов сейсмичности открыт. Задачу о *подходящем показателе* мы будем трактовать следующим образом: найти такое c , при котором эмпирические распределения нормированных величин, зависящих от масштаба (скажем, $\tau_L \lambda_L$ или $\lambda(L \times L)/\lambda_L$) либо сходятся при $L \rightarrow 0$, либо наиболее близки при малых L . Если (2) используется для описания повторяемости событий в *типичной* ячейке размера L , то понятия *подходящий* для показателя c и *типичный* для ячейки должны быть согласованы.

Ниже вопрос о выборе показателя c рассматривается для статистики $\lambda(L \times L)$. В этом случае удается кое-что предсказать теоретически, если допустить мультифрактальность меры $\lambda(dg|m)$, определяющей среднее число событий $M > t$ в единицу времени на площадке dg . Для мер этого типа обобщенные размерности d_q определены и не все из них одинаковы. Сразу оговоримся, что гипотеза о мультифрактальности сейсмичности имеет как своих сторонников [13–16], так и оппонентов [17, 18]. Это не удивительно. Мультифракталы являются достаточно тонкой

математической идеализацией физических объектов, демонстрирующих разнообразие свойств локального подобия; полный мультифрактальный спектр трудно измерить и, кроме того, мультифрактальные объекты не всегда легко отличить от псевдофракталов или от их промежуточных форм даже при наличии большого объема данных (см. примеры в [19–20]). На практике в лучшем случае удается фиксировать мультифрактальное поведение меры в некотором диапазоне масштабов ΔL . И тогда величина s в соотношении (2) становится параметром для исследуемого унифицированного закона в диапазоне ΔL . Ниже теоретический анализ ансамблей $\{\lambda(L \times L)\}$ мы дополняем анализом сейсмичности Калифорнии.

1. Скейлинги для мультифрактальной сейсмичности

1.1. Мера $\lambda(dg|m)$ как мультифрактал

Разобьем регион G прямоугольной сеткой с шагом L на квадраты $L \times L$. Пусть $\lambda(G)$ определяет интенсивность событий магнитуды $M > m$ в G , а $\lambda_i(L \times L)$ – то же в i -й ячейке $L \times L$. Число квадратов с положительным λ_i обозначим через $n(L)$. Если имеет место соотношение

$$\lg n(L) = -d_0 \lg L(1 + o(1)), \quad L \rightarrow 0, \quad 0 < d_0 < 2, \quad (5)$$

то говорят, что носитель меры $\lambda(dg|m)$ фрактален и имеет боксовую размерность d_0 . В случае мультифрактальности $\lambda(dg|m)$ носитель меры, грубо говоря, расслаивается в сумму фрактальных подмножеств S_α с Хаусдорфовыми размерностями $f(\alpha)$. Для любой точки из S_α существует такая последовательность площадок $L \times L$, $L \rightarrow 0$, что

$$\lg \lambda(L \times L) = \alpha \lg L(1 + o(1)). \quad (6)$$

Соотношение (6) описывает тип пространственной концентрации событий или тип сингулярности меры $\lambda(dg|m)$, сам параметр α называют показателем Гельдера или локальной размерностью меры. Соответственно, $f(\alpha)$ описывает Хаусдорфову размерность точек с типом сингулярности α . Пары $(\alpha, f(\alpha))$ образуют мультифрактальный спектр меры $\lambda(dg|m)$. Информацию о мультифрактальном поведении $\lambda(dg|m)$ получают из функции Реньи

$$R_L(q) = \sum_{\lambda_i > 0} (\lambda_i(L \times L) / \lambda(G))^q, \quad |q| < \infty, \quad (7)$$

которая в случае мультифракталов имеет асимптотику

$$\lg R_L(q) = \tau(q) \lg L(1 + o(1)), \quad L \rightarrow 0, \quad (8)$$

где скейлинговый индекс $\tau(q)$ связан с $f(\alpha)$ преобразованием Лежандра

$$\tau(q) = \min_{\alpha} (q\alpha - f(\alpha)). \quad (9)$$

При $q = 0$ соотношение (8) переходит в (5) и поэтому $\tau(0) = -d_0$. Для монофрактала, когда спектр $(\alpha, f(\alpha))$ вырождается в точку (d_0, d_0) , функция $\tau(q)$ линейна, $\tau(q) = d_0(q - 1)$. В общем случае функция $-\tau(q)$ выпукла и $\tau(1) = 0$ (см. ниже пример на рис. 2). Если $-\tau(q)$ строго выпуклая и гладкая, область значений производной $\dot{\tau}(q)$ определяет интервал возможных сингулярностей α в соотношении (6), а преобразование Лежандра функции $\tau(q)$

$$f(\alpha) = \min_q (q\alpha - \tau(q))$$

описывает Хаусдорфовы размерности этих сингулярностей. Эти утверждения составляют содержание мультифрактального формализма (см., напр., [21]), который установлен для многих модельных примеров. В паталогических случаях функция $-\tau(q)$ может существовать, но не быть выпуклой. (Практически важные примеры таких псевдомультифракталов см. в работе [19].)

Величины $d_q = \tau(q)/(q - 1)$ известны как размерности Реньи или как обобщенные размерности Грассбергера-Прокачия. В силу выпуклости $(-\tau(q))$ числа d_q не возрастают с ростом q . Из соотношения $\tau(1) = 0$ и теоремы о среднем имеем

$$d_q = \frac{\tau(q) - \tau(1)}{q - 1} = \dot{\tau}(q^*), \quad (10)$$

где q^* — некоторая точка между 1 и q . Поэтому d_q в случае гладких и строго выпуклых $-\tau(q)$ описывает один из типов сингулярностей или локальную размерность меры $\lambda(dg|m)$. В случае $q = 1$ величина $d_1 = \dot{\tau}(1)$. Она известна как “информационная” размерность и замечательна тем, что является корнем уравнения $\alpha = f(\alpha)$. Решениям этого уравнения обычно отвечают множества S_α положительной λ -меры и поэтому с физической точки зрения они представляют наибольший интерес. Строгая выпуклость и гладкость $-\tau(q)$ в окрестности единицы обеспечивает единственность корня $\alpha = f(\alpha)$. В этом случае замыкание множества S_α , $\alpha = d_1$ определяет топологический носитель меры λ . Будем предполагать, что имеем дело с регулярной ситуацией, когда Хаусдорфова и боксовая размерности носителя совпадают.

Таким образом, из обобщенных размерностей d_p только d_0 и d_1 связаны с фрактальностью носителя меры, а остальные, не равные d_0 и d_1 , несут информацию о локальных типах сингулярности меры. (Примеры теоретического анализа мультифракталов, детерминированных и стохастических, см., напр., в [22–24].)

1.2. Шкалирование осреднений $\lambda_i(L \times L)$

Чтобы охарактеризовать в области G интенсивность событий магнитуды $M > m$ на площадке $L \times L$, осредним числа $\lambda_i(L \times L)$ по всем площадкам с $\lambda_i > 0$ с некоторыми весами. Выбор весов зависит от целей, для которых мы собираемся использовать среднее. Достаточно гибким и естественным является однопараметрическое семейство весов

$$m_i^{(p)} = k_p \lambda_i^p, \quad |p| < \infty, \quad \lambda_i > 0,$$

где k_p – нормировочная константа такая, что $\sum m_i^{(p)} = 1$, т.е. с учетом (7)

$$1/k_p = R_L(p) \lambda^p(G).$$

При $p = 0$ имеем обычное осреднение чисел $\lambda_i(L \times L)$ с $\lambda_i > 0$, а при $p \gg 1$ среднее будет характеризовать наиболее активные ячейки, поскольку

$$\sum \lambda_i m_i^{(p)} \rightarrow \max_i \lambda_i, \quad p \rightarrow \infty.$$

Пусть среднее $\langle . \rangle_p$ отвечает весам $m_i^{(p)}$. Тогда

$$\langle \lambda_i(L \times L) \rangle_p = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i m_i^{(p)} = \lambda(G) R_L(p+1) / R_L(p).$$

Если (8) имеет место, то

$$\lg \langle \lambda_i(L \times L) \rangle_p = [\tau(p+1) - \tau(p)] \lg L (1 + o(1)) + \lg \lambda(G)$$

или

$$\langle \lambda_i(L \times L) \rangle_p \sim \lambda(G) L^{c_p}, \tag{11}$$

где c_p имеет нетривиальный вид

$$c_p = \tau(p+1) - \tau(p) = p d_{p+1} - (p-1) d_p. \tag{12}$$

В больших регионах интенсивность событий $\lambda(G)$ хорошо описывается законом повторяемости Гутенберга–Рихтера: $\lambda(G) = a10^{-bm}$. Поэтому (11) и (12) представляют уточненные варианты соотношения (2) в случае мультифрактальной меры $\lambda(dg|m)$.

Наиболее интересны случаи осреднения с $p = 0$ и $p = 1$. Тогда

$$c_p = \begin{cases} d_0 \text{ боксовая размерность,} & p = 0, \\ d_2 \text{ корреляционная размерность,} & p = 1. \end{cases}$$

Таким образом, обычному осреднению $\langle \lambda_i \rangle_0$ отвечает масштабный индекс $c = d_0$, т.е. боксовая размерность носителя меры $\lambda(dg|m)$, а осреднению с весами, которые пропорциональны числам событий в ячейках $L \times L$, отвечает корреляционная размерность $c = d_2$.

Веса $\{m_i^{(p)}\}$ можно интерпретировать как распределение вероятностей $\mathcal{P}_L^{(p)}$, с которым мы выбираем площадку $L \times L$. Поэтому (11) описывает интенсивность событий с $M > m$ в $\mathcal{P}_L^{(p)}$ – случайной ячейке $L \times L$ в области G . Так же, как в (10) приходим к заключению, что

$$c_p = \tau(p+1) - \tau(p) = \dot{\tau}(p + \theta^*), \quad 0 \leq \theta^* \leq 1,$$

т.е. c_p может отвечать некоторому типу сингулярности меры $\lambda(dg|m)$.

1.3. Шкалирование распределения $\lambda(L \times L)$

Рассмотрим ансамбль безразмерных величин

$$\xi_L = \lambda(L \times L) / [\lambda(G)(L/L_0)^c], \quad (13)$$

связанный с разбиением региона G на ячейки $L \times L$. Здесь L_0 – внешний масштаб, скажем, $L_0 = \sqrt{\text{площадь } G}$, а ξ_L отличаются от a_L в (3) постоянным множителем. Коррал [4] нашел, что распределение чисел ξ_L для Калифорнии с параметром $c = 1.6$ практически не зависит от параметра L в диапазоне 10–120 км и $m = 2$ –3. В работе [4] утверждается также слабая зависимость распределения ξ_L от выбора временного интервала ΔT , начиная с 1 дня и до 9 лет. Утверждение о ΔT требует уточнения, чтобы быть воспроизводимым. Тем не менее, возникает вопрос для мультифрактальных мер $\lambda(dg|m)$: при каких c распределение чисел ξ_L имеет предел при $L \rightarrow 0$? Как и в разделе 1.2, расширим задачу, используя веса $m_i^{(p)} = k_p \lambda_i^p$ в качестве вероятностной меры $\mathcal{P}_L^{(p)}$ для ξ_L . Тогда при $p = 0$ мы приходим к распределению ξ_L , которое рассматривалось в работе [4].

Класс мультифрактальных мер очень широк, а сами меры могут быть устроены очень сложно. Поэтому приведем стандартные эвристические рассуждения, цель которых – найти для каждого p подходящее

$c = c^{(p)}$, при котором мы можем ожидать нетривиальное предельное распределение для $(\xi_L, \mathcal{P}_L^{(p)})$.

Пусть $f(\alpha)$ – мультифрактальный спектр $\lambda(dg|m)$. Тогда число $L \times L$ ячеек типа α , т.е. таких, что $\lambda_i(L \times L) \sim L^\alpha$, растет как $L^{-f(\alpha)}$. Поэтому величина $\lambda_i(L \times L)/L^c$ отделена от 0 и ∞ при $L \rightarrow 0$, если i -я ячейка относится к типу $\alpha = c$. Вероятность или вес ячеек типа α имеет порядок

$$L^{-f(\alpha)} m_i^{(p)} = L^{-f(\alpha)} \lambda_i^p(L \times L) / R_L(p) \sim L^{-f(\alpha) + p \alpha} / L^{\tau(p)},$$

где $R_L(p)$ определено в (7), а $\tau(p)$, согласно преобразованию Лежандра (9), есть $\tau(p) = \min_{\alpha} (p\alpha - f(\alpha))$. Полученная вероятность отделена от 0 при $L \neq 0$, если только $\tau(p) = p\alpha - f(\alpha)$. Следовательно, искомое $c = c^{(p)}$ таково, что при $\alpha = c$ функция $p\alpha - f(\alpha)$ достигает минимума; иначе говоря, $c^{(p)} = \arg \min_{\alpha} (p\alpha - f(\alpha))$.

В частности, при $p = 0$ искомое c есть точка максимума $f(\alpha)$, а при $p = 1$ оно совпадает с информационной размерностью d_1 , для которой $d_1 = f(d_1)$. Таким образом, если уравнения $f(\alpha) = d_0$ и $f(\alpha) = \alpha$ имеют единственные решения, то

$$c^{(p)} = \begin{cases} \alpha : f(\alpha) = d_0, & p = 0, \\ d_1, & p = 1. \end{cases}$$

Если спектр $f(\alpha)$ – строго выпуклая функция, то он описывается параметрически в терминах $\tau(q) : \alpha = \dot{\tau}(q), f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$. Отсюда, с учетом выпуклости $-\tau(q)$, имеем

$$\alpha p - f(\alpha) = (p - q)\dot{\tau}(q) + \tau(q) \geq \tau(p).$$

Левая часть достигает минимума при $q = p$. Поэтому

$$c^{(p)} = \dot{\tau}(p). \tag{14}$$

Рассмотрим пример. Пусть мера $\lambda(dg|m)$ имеет плотность $\dot{\lambda}(g|m)$, тогда спектр $f(\alpha)$ состоит из одной точки $(\alpha, f(\alpha)) = (2, 2)$. Поэтому $c^{(p)} = d_0 = 2$. В этом случае можно сказать больше: распределения $(\xi_L, \mathcal{P}_L^{(p)})$ имеют предел при $L \rightarrow 0$.

При $p = 0$

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\#\{0 < \xi_L < x\}}{\#\{\xi_L > 0\}} = \frac{\text{mes}\{g : 0 < L_0^2 \dot{\lambda}(g|m) / \lambda(G) < x\}}{\text{mes}\{g : \dot{\lambda}(g|m) > 0\}} = F_{\lambda}^{(0)}(x), \tag{15}$$

где $mes\{g : \varphi(g) < x\}$ есть мера Лебега (площадь) точек, для которых $\varphi(g) < x$. Предел не зависит от выбора решетки разбиения региона G . В случае $p > 0$ предел распределений $(\xi_L, \mathcal{F}_L^{(p)})$ есть

$$F_\lambda^{(p)}(x) = \int_0^x u^p dF_\lambda^{(0)}(u) / \int_0^\infty u^p dF_\lambda^{(0)}(u). \quad (16)$$

Усложним пример. Рассмотрим меру $\lambda(dg|m)$, сосредоточенную на квадрате $[0, 1]^2$ и отрезке $[1, 2]$, где имеет соответствующие плотности. Это би-фрактальная смесь с двумя точками в спектре $(\alpha, f(\alpha))$: $(2, 2)$ и $(1, 1)$. Для нее функция $\tau(q) = \min(d_0(p-1), d_2(p-1))$, где $d_0 = 2$ и $d_2 = 1$. При $0 \leq p < 1$ получим $c^{(p)} = 2$, а при $p > 1$ получим $c^{(p)} = 1$. В обоих случаях существуют предельные меры, которые могут быть выписаны подобно (15) и (16). Они зависят от меры $\lambda(dg|m)$ на $[0, 1]^2$ при $c = 2$ и на $[1, 2]$ при $c = 1$. При $p = 1$ ситуация подобна фазовому переходу в термодинамике. Возможны две нормировки с $c = 1$ и $c = 2$. При $c = 1$ ($c = 2$) предельное распределение имеет плотность, которая определяется мерой $\lambda(dg|m)$ на $[1, 2]$ ($[0, 1]^2$), и сингулярную часть (атом), которая сосредоточена в точке $0(\infty)$, соответственно.

Соотношения (12) и (14) указывают на любопытный факт: показатели c , подходящие для шкалирования распределения $\{\lambda(L \times L), \mathcal{F}_L^{(p)}\}$ и его среднего, вообще говоря, не совпадают между собой. Покажем, что

$$c_p \leq c^{(p)}. \quad (17)$$

В самом деле, функция $-\tau(q)$ выпуклая, поэтому в интервале $(p, p+1)$ она лежит выше хорды, соединяющей точки $(p, \tau(p))$ и $(p+1, \tau(p+1))$, т.е.

$$\tau(q) \geq \tau(p) + (\tau(p+1) - \tau(p))(q-p), \quad p < q < p+1.$$

Но, тогда

$$c^{(p)} = \lim_{q \rightarrow p} \frac{\tau(q) - \tau(p)}{q-p} \geq \tau(p+1) - \tau(p) = c_p.$$

В силу выпуклости $-\tau(q)$ равенство $c^{(p)} = c_p$ возможно, если $\tau(q)$ в $(p, p+1)$ — линейная функция. Несовпадение c_p и $c^{(p)}$ объясняется тем, что в предельном распределении вклады ячеек типа $\alpha \neq c^{(p)}$ переходят в 0 или ∞ (см. примеры).

1.4. Оценивание $\tau(q)$

Рабочим полигоном для анализа унифицированных законов сейсмичности используют Калифорнию с каталогом событий магнитуды $M \geq 2$. Для этого региона известны оценки $d_0 = 1.6$ [4] и $d_2 = 1.1-1.2$ [25, 9], свидетельствующие в пользу нелинейности $\tau(q)$, $\tau(q) \neq d_0(q-1)$, и, следовательно, в пользу неединственности выбора c в соотношении (2). Об этом же говорит строгое убывание размерностей $d_q = \tau(q)/(q-1)$ в интервале $2 \leq q \leq 5$, найденное Годано и др. [16] по $M \geq 1.5$ для периода 1975–1995 гг. Численное значение $d_2 = 0.85$ из последней работы сильно расходится с $d_2 = 1.2$ для $M \geq 2$. Вместе с тем, указанные публикации не содержат информации, необходимой для сопоставления оценок d_q . Поэтому нелинейность $\tau(q)$ требует независимой проверки.

Формально $\tau(q)$ определяется через функцию Реньи $R_L(q)$ (см. (17)) как наклон графика $\lg R_L(q)$ в зависимости от $\lg L$ при малых L . Главная трудность состоит в том, чтобы найти диапазон масштабов (L_*, L^*) , в котором оценка наклона устойчива.

Необходимость нижнего порога L_* обусловлена конечностью множества сейсмических событий. Число ячеек n_L , покрывающих носитель меры $\lambda(dg|m)$, имеет порядок $(L_0/L)^{d_0}$. Если L меняется как геометрическая прогрессия, то n_L быстро растет при $L \rightarrow 0$. Поэтому, начиная с некоторого малого L , любая непустая $L \times L$ ячейка будет содержать одно событие. Это ведет к формально правильной, но неверной оценке $d_q = 0$, $q \geq 0$. Если потребовать, чтобы в среднем на ячейку приходилось k и более событий, т.е. $N/n_L \geq k$ (где N – общее число событий), то придем к ограничению $L_* \geq (k/N)^{1/d_0} L_0$. Оно будет выполнено при всех $d_0 \leq 2$, если

$$L_* = \sqrt{k/N} L_0. \quad (18)$$

Порог (18) с $k = 1$ предложен в работе [26]. Он достаточно груб, поскольку рассчитан на любую меру $\lambda(dg|m)$. Чтобы преодолеть этот недостаток, заметим следующее. Теоретически изолированные точки в носителе меры $\lambda(dg|m)$ не оказывают влияния на ее мультифрактальный спектр или на обобщенные размерности $d_q > 0$. Поэтому, наряду с функцией Реньи $R_L(q)$, будем вычислять $R_L(q|k)$. Эмпирический аналог $R_L(q)$ суммирует ненулевые величины $[n(L \times L, T)/n(G, T)]^q$ по ячейкам $L \times L$, где $n(A, T)$ – число событий в подобласти A за период T . Соответственно, $R_L(q|k)$ учитывает только те ячейки, где $n(L \times L, T) > k$; в частности $R_L(q) = R_L(q|0)$. Масштаб L , начиная с которого функции $R_L(q)$ и $R_L(q|1)$ начинают заметно расходиться, естественно принять за L_* . Иначе говоря, за L_* принимается масштаб, ниже которого дискретная (в масштабе L_*) компонента носителя меры играет существенную

роль в оценках мультифрактального спектра. Предложенная оценка L_* эффективна при малых q , поскольку с ростом q ($q > 1$) вклад слагаемых вида $[1/n(G, T)]^q$ в $R_L(q)$ быстро уменьшается. Формальное правило выбора L_* для $q \geq 0$ можно выразить в виде

$$\frac{|R_{L_*}(0) - R_{L_*}(0|1)|}{R_{L_*}(0)} < \varepsilon,$$

где ε – малый параметр (ниже $\varepsilon = 10\%$).

Рассмотрим верхнюю границу L^* . Традиционное оценивание $\tau(q)$ основано не на функции Реньи, а на ее интегральной модификации

$$I_L(q) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [n(B_L(g_i), T)/n(G, T)]^{q-1}, \quad q \neq 0, 1, \quad (19)$$

где $B_L(g)$ – круг диаметра L с центром в g , а $\{g_i\}$ – эпицентры событий в каталоге. Чтобы большинство кругов $B_L(g_i)$ не выходило за пределы региона G , авторы [26] предложили брать $L^* = \rho L_0$; параметр $\rho = 1/6$, если область G близка к круговой, а мера $\lambda(dg|m)$ почти равномерна. Таким образом, мотивация оценки L^* связана с выбором инструмента для оценивания $\tau(q)$, а не с существом задачи. В иллюстративных примерах, основанных на самоподобных объектах, в литературе используют $L^* = L_0$. Однако уже простейший фрактальный объект – канторова лестница – распадается на подобные части только при специально выбранных масштабе $L = (1/3)^k$ и отрезке наблюдения. Поэтому на практике естественно иметь дело с такими масштабами, для которых совокупность $\{n(L \times L, T)\}$ с ненулевыми $n(L \times L, T)$ не мала, т.е. когда указанная совокупность может проявить свойства статистического ансамбля. Если $n_L \sim (L_0/L)^{d_0}$, $n_L > 100$, а $d_0 \cong 2$, то $L^* \cong L_0/10$.

Предложенная оценка L^* тоже эффективна лишь при малых q . С ростом q основной вклад в $R_L(q)$ дают точки большой концентрации; их мало при ограниченном объеме данных и, значит, труднее набрать представительный статистический ансамбль из $n(L \times L, T)$. В этом главное препятствие для надежного оценивания $\tau(q)$ при больших q . В турбулентности (см. [27]), где имеются, повидимому, наилучшие данные для мультифрактального анализа, нелинейность $\tau(q)$ для поля диссипации энергии при больших числах Рейнольда установлена при $0 \leq q \leq 5$.

Если (\underline{L}, \bar{L}) – сегмент прямолинейности графиков $(\lg R_L(q), \lg L)$, $0 \leq q \leq q_0$, то будем говорить о мультифрактальном поведении сейсмичности в диапазоне масштабов (\underline{L}, \bar{L}) . Чтобы оценка фрактальной размерности была достаточно убедительной, авторы [17] требуют, чтобы $\bar{L}/\underline{L} \geq 10^s$, $s \geq 3$. Это очень жесткое для приложений требование;

оно предполагает в нашем случае и мультифрактальность и подобие сейсмичности в широком диапазоне масштабов. Если $L_0 = 10^3$ км, то $L^* \sim 100$ км, а если точность определения эпицентров $\Delta = 1 \text{ км} \leq L_*$, то $\bar{L}/L \leq 100$. В анализе унифицированных законов сейсмичности [4] мы сталкиваемся с интервалом масштабов $\Delta L = (10-120 \text{ км})$. Поэтому утверждение о мультифрактальном поведении сейсмичности в указанном диапазоне ΔL представляет интерес для приложений.

2. Сейсмичность Калифорнии

Данные. Следуя [4], для анализа реальной пространственной сейсмичности рассматривалась подобласть в Калифорнии: $G = (30^\circ\text{N}, 40^\circ\text{N}) \times (113^\circ\text{W}, 123^\circ\text{W})$ (рис. 1). Были использованы события с $M \geq 2$

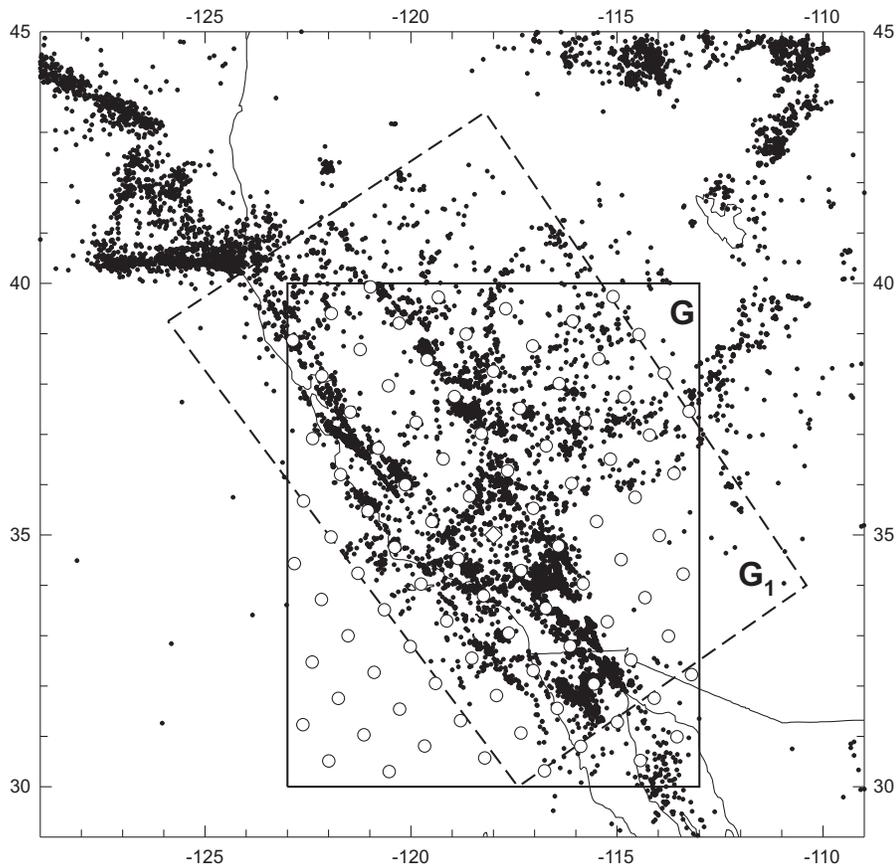


Рис. 1. Сейсмические события ($M \geq 3$) Калифорнии: $(L \times L)$ -решетка (белые кружки) с шагом $L = 100$ км и центром (ромбик); основная (G) и альтернативная (G_1) прямоугольные сейсмические области в расчетах размерностей

и с глубиной до 100 км за период 1984–2003 гг. В использованном нами каталоге ANSS [28] имеются 116700 таких землетрясений.

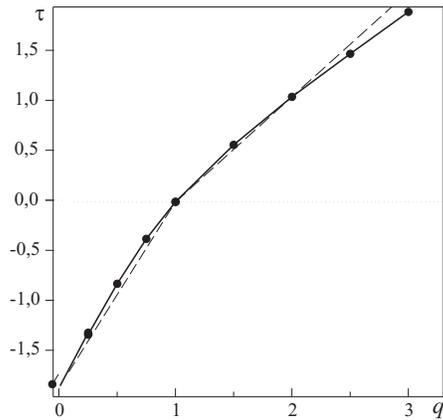


Рис. 2. Тау-функция для событий с $M \geq 2$ из области G (рис. 1), полученная по интервалу масштабов $\Delta L = (10, 100)$ км.

Ломаная из двух звеньев отвечает $\tau(q)$ для би-фрактала с наблюдаемыми размерностями $d_0 = -\tau(0)$ и $d_2 = \tau(1)$ (см. пример в разд. 1.3); численные значения τ даны на рис. 3 и 4

Тау-функция (рис. 2). Устойчивые значения $\tau(q)$ получены для $0 \leq q \leq 3$ и диапазона масштабов $\Delta L = (10\text{--}20, 100)$ км. Методика оценивания $\tau(q)$ описана в разделе 1.4 и иллюстрируется на рис. 3 и 4.

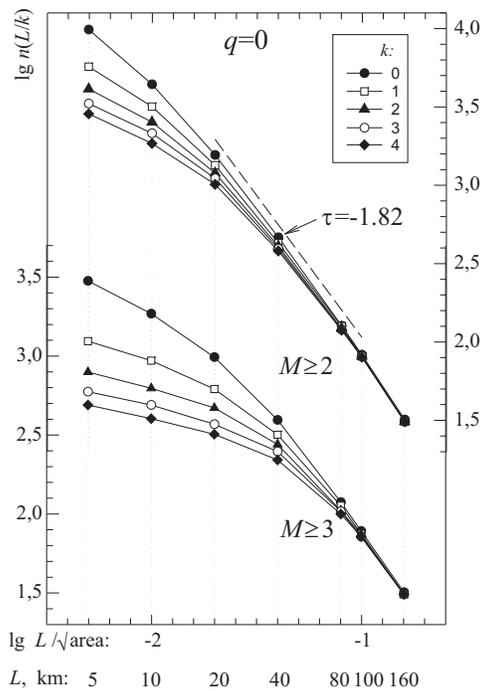


Рис. 3. Данные для оценивания боксовой размерности d_0 по событиям с $M \geq 2$ и $M \geq 3$, $d_0 = -\tau(q)$, $q = 0$.

По вертикали отложены числа $L \times L$ ячеек $n(L|k)$ с числом событий больше k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Пунктирная прямая несет двойную нагрузку: ее наклон τ отвечает оценке $\tau(0)$ методом наименьших квадратов по данным $n(L|0)$ в интервале масштабов ΔL , а интервал ΔL определяется областью задания пунктирной линии

Ось сетки, покрывающей область G , ориентирована вдоль разлома Сан-Андреас. Ячейка $L \times L$ участвовала в расчетах, если ее центр и не менее трех вершин принадлежали G . Поясним результаты оценивания.

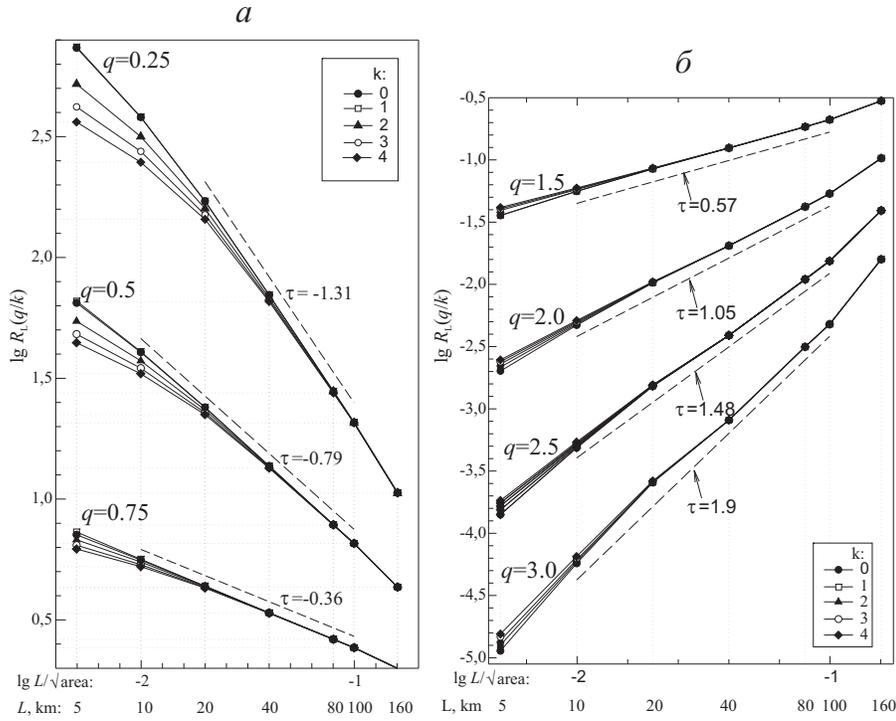


Рис. 4. Данные для оценивания $\tau(q)$ для $q = 0.25, 0.5, 0.75$ (а) и $q = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ (б). Пунктирные линии несут ту же нагрузку, что и на рис. 3. По вертикали отложены модифицированные функции Реньи $R_L(q|k)$ (см. разд. 1.4), сосчитанные по $L \times L$ ячейкам с числом событий больше k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Линейный размер области G есть $L_0 = \sqrt{n \cdot G} = 1004$ км. Поэтому априорная оценка верхнего порога масштабов есть $L^* = L_0/10 = 100$ км. Приведенные ниже числа непустых ячеек $L \times L$:

L км	10	20	40	80	100
n_L	4366	1544	468	128	80

подтверждают этот выбор. При $L = 160$ км, число $n_L = 29$, что мало для статистического ансамбля $\lambda(L \times L)$.

Боксовая размерность $d_0 = -\tau(0)$ наиболее сложна для оценивания. На рис. 3 статистика $R_L(0|k)$ определяет число $L \times L$ ячеек с числом событий больше k , $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Кривые $\lg R_L(0|0)$ и $\lg R_L(0|1)$ заметно расходятся при $L < 10$ км. Этим объясняется выбор нижнего порога $L_* = 10-20$ км для событий с $M \geq 2$. Наклон графика $(\lg R_L(0|0), \lg L)$ в области (L_*, L^*) оценивался методом наименьших квадратов; оценки боксовой размерности таковы: $d_0 = 1.82$, если $\Delta L = 20-100$ и $d_0 = 1.74$, если $\Delta L = 10-100$ км. При оценивании d_0 по $M \geq 3$ интервал $(L_*, L^*) = (20-40, 100)$ км слишком узок для уверенного оценивания размерности d_0 (см. рис. 3).

Оценивание $\tau(q)$, $q > 0$ не требует дополнительных пояснений. Рис. 4 показывает, что $\tau(q)$ определяется устойчиво для $q = 0.25-2.5$ в интервале масштабов $\Delta L = 10-100$ км. Начиная с $q = 3$ эта устойчивость нарушается (см. рис. 4, б) (причины неустойчивости обсуждались в разд. 1.4). Расчеты $\tau(q)$ при отрицательных q требуют высокой точности оценок $\lambda(L \times L)$ в ячейках с малым числом событий. В силу статистических причин это требование не реалистично. В итоге наши оценки $\tau(q)$ относятся к интервалу $0 \leq q \leq 3$. Выпуклость функции $-\tau(q)$ (см. рис. 2) и линейность графиков на рис. 3 и 4 в интервале $\Delta L = (10, 100)$ км позволяют говорить, что мера $\lambda(dg|m=2)$ выглядит как мультифрактал в указанном диапазоне масштабов.

Специальный интерес для нашей работы представляют оценки производных $\dot{\tau}(q)$ при $q = 0$ и $q = 1$ (см. (14)). Эти величины определялись из следующих соотношений:

$$n_L^{-1} \sum_{i=1}^{n_L} \log p_i(L) = \dot{\tau}(0) \log L(1 + 0(1)), \quad (20)$$

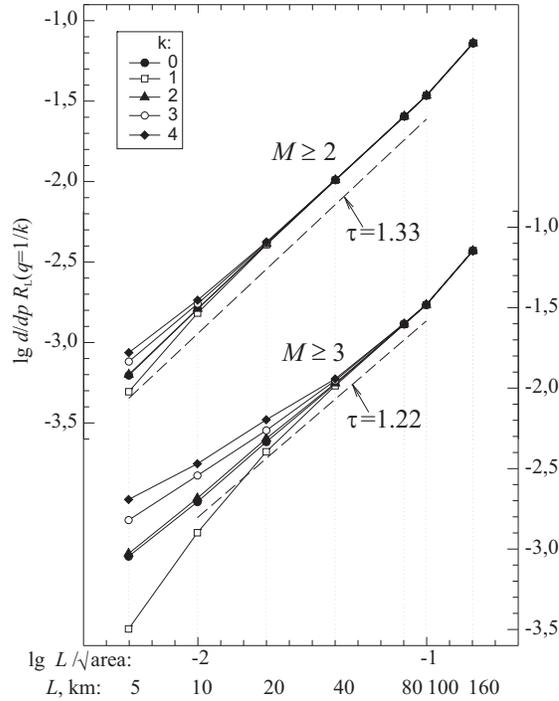
$$\sum_{i=1}^{n_L} p_i(L) \log p_i(L) = \dot{\tau}(1) \log L(1 + 0(1)), \quad (21)$$

где $p_i(L) = n_i(L \times L, T)/n(G, T)$, $n(A, T)$ – число событий в A за время T . Соотношения (20) и (21) получаются из (8) формальным дифференцированием по q . Методика оценивания $\dot{\tau}(q)$ повторяет оценивание $\tau(q)$. В случае $q = 1$ она иллюстрируется на рис. 5 для $M \geq 2$ и $M \geq 3$. Эффект от использования чисел $n_i(L \times L, T) > k$ с $k > 0$ не является односторонним по отношению к случаю с $k = 0$ (ср. рис. 5 с рис. 3 и 4 в области малых L). Это позволяет оценивать $\dot{\tau}(1)$: $\dot{\tau}(1) = 1.33$ в интервале масштабов $\Delta L = (5, 100)$ км и при $M \geq 2$ и $\dot{\tau}(1) = 1.22$ в интервале масштабов $\Delta L = (10, 100)$ км и при $M \geq 3$. До некоторой степени неожиданно, что оценки $\dot{\tau}(1)$ оказались более устойчивыми, чем описанные выше $\tau(q)$.

Вариации оценок. Наибольший интерес для дальнейшего анализа представляют величины: $d_0 = -\tau(0)$ (боксовая размерность), $d_2 = \tau(2)$ (корреляционная размерность), $\dot{\tau}(0)$ и $d_1 = \dot{\tau}(1)$ (информационная размерность). На их оценку могут влиять: выбор (L_*, L^*) , положение решетки, границы области G и неточность эпицентров. Для (L_*, L^*) рассматривались варианты: (10, 100) км, (20, 100) км и (20, 80) км. Положение решетки определяется центром (см. рис. 1) и направлением главной оси. Положение центра смещалось в пределах ± 7 км, поскольку $L_* = 10$ км; направление оси решетки менялось в пределах $\pm 10^\circ$. Наряду с указанной областью G , использовалась альтернативная область G_1 с берегами, параллельными оси решетки (см. рис. 1).

Рис. 5. Данные для оценивания информационной размерности $d_1 = \dot{\tau}(1)$ по событиям с $M \geq 2$ и $M \geq 3$.

Пунктирные линии несут ту же нагрузку, что и на рис. 3. По вертикали отложены производные $d/dq R_L(q=1|k)$ при $k = 0, 1, 2, 3, 4$, где R_L – модифицированная функция Реньи (см. также левую часть соотношения (21))



В каталоге ANSS имеются события с низкой эпицентральной точностью. На это указывает число станций n_{st} , использованных для определения положения землетрясения. Для вариаций оценок использовались два варианта: события с $n_{st} \geq 1$ (основной) и с $n_{st} \geq 7$.

Следующий список суммирует вариации оценок для указанных размерностей:

$$\frac{\dot{\tau}(0) \quad d_0 \quad d_1 \quad d_2}{2 \pm 0.1 \quad 1.8 \pm 0.1 \quad 1.35 \pm 0.05 \quad 1.1 \pm 0.05}, \quad (22)$$

он подтверждает, что используемые размерности d_0 и d_2 для шкалирования $\lambda(L \times L)$ существенно различны.

Распределения ξ_L . Исходя из мультифрактальных представлений, мы пришли к заключению, что подходящий параметр c для шкалирования распределения $\lambda(L \times L)$ может быть: $c = \dot{\tau}(0) \cong 2$ и $c = d_1 \cong 1.35$. Первое значение c отвечает ситуации, когда непустая $L \times L$ ячейка учитывается с постоянным весом $1/n_L$, а второе – ситуации, когда вес пропорционален сейсмической активности этой ячейки. Параметически первый случай отвечает значению $p = 0$, а второй – значению $p = 1$. При выборе теоретических оценок параметра c мы ожидаем наименьшего разброса в распределениях ξ_L (см. (13)) в диапазоне масштабов, где наблюдается мультифрактальное поведение меры $\lambda(dg|m=2)$, т.е. при $\Delta L = (10, 100)$ км.

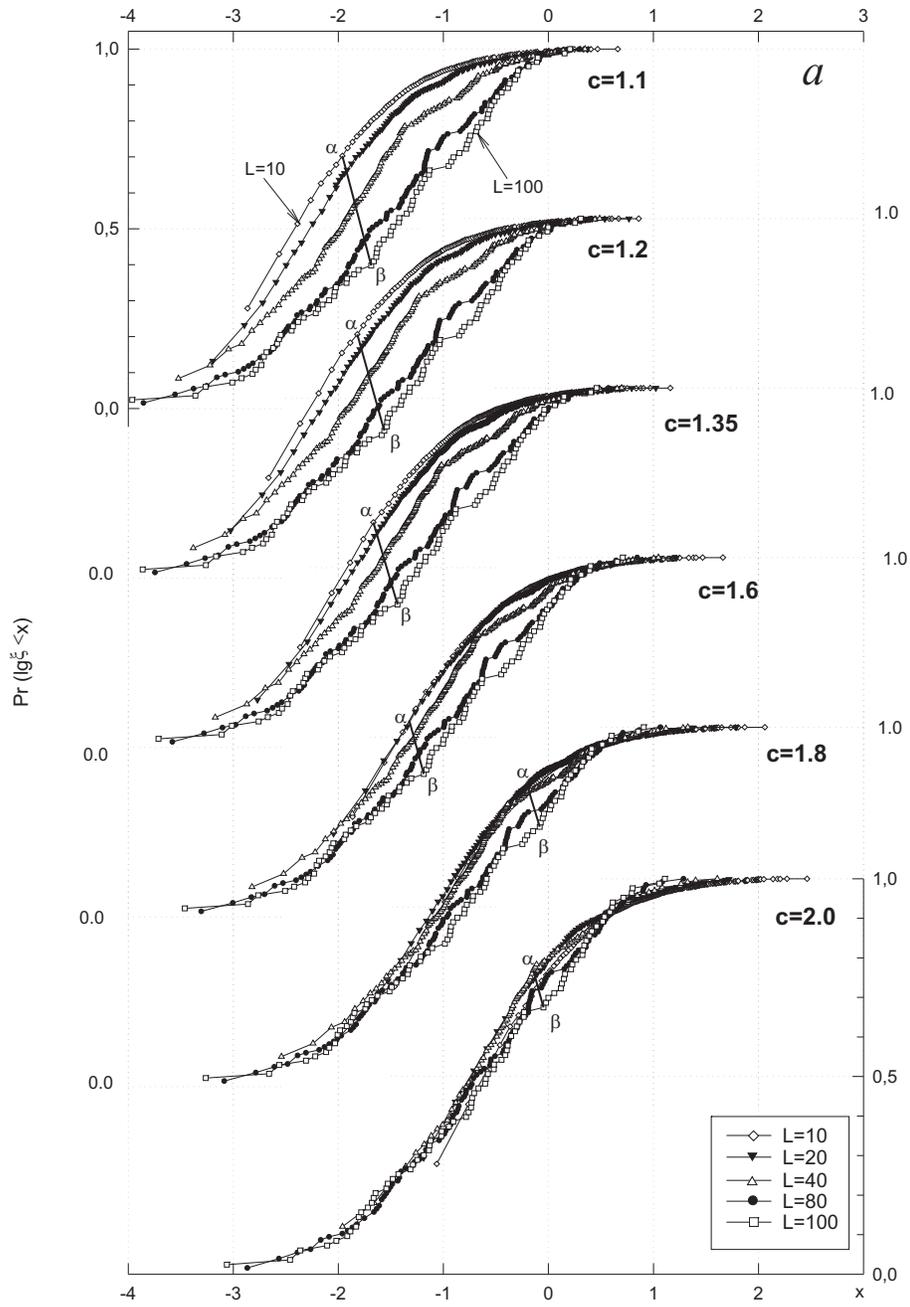
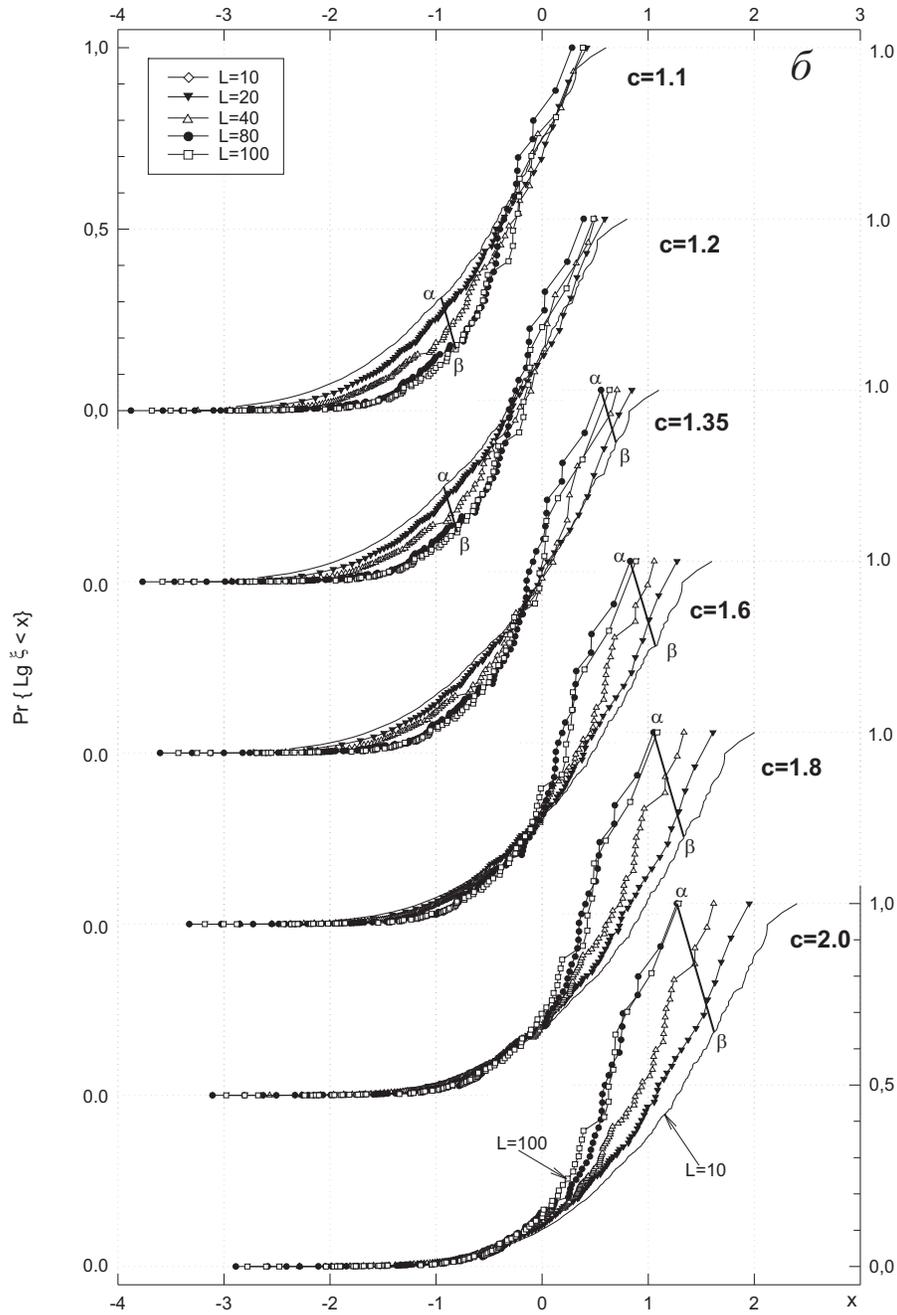


Рис. 6. Функции распределения величины $\lg \xi_L$, отвечающие пространственным масштабам $L = 10, 20, 40, 80, 100$ км и масштабным индексам $c = 1.1, 1.35, 1.6, 1.8, 2.0$. Отрезок (α, β) имеет наклон (-1) , его длина несет информацию о разбросе распределений $\lg \xi_L$ при фиксированном c :



a – каждая $L \times L$ ячейка входит в распределение с одинаковым весом (случай $p = 0$),
b – каждая $L \times L$ ячейка входит в распределение с весом, пропорциональным сейсмической активности в ячейке (случай $p = 1$, см. текст). В этом случае для локализации минимума разброса распределений дополнительно используется индекс $c = 1.2$

Функции распределения величин $\lg \xi_L$ представлены на рис. 6,а (случай $p = 0$) и 6,б (случай $p = 1$) для разных значений c из списка (22). Мы использовали дополнительно значение $c = 1.6$, отвечающее оценке d_0 в работе [4]. Кривые на рис. 6 можно рассматривать и как графики распределений ξ_L , представленных в log-шкале по горизонтали. Выбор log-шкалы для ξ_L вполне естественен по двум причинам: он отвечает содержанию асимптотики (6) и наличию больших, до пяти порядков, вариаций ξ_L (см. рис. 6).

При сравнении распределений возникает вопрос о выборе метрики. В нашем случае вполне адекватной является метрика Леви, она активно используется в теории вероятностей при анализе сходимости распределений. Эта метрика в первую очередь учитывает расхождение распределений в области главных значений и меньше реагирует на поведение “хвостов”. В нашем случае малые значения ξ_L связаны с малыми числами $n(L \times L, T)$ и поэтому очень неточны. Напротив, большие значения ξ_L имеют малые относительные погрешности, однако частоты появления больших ξ_L малы. Они определяются афтершоковыми последовательностями с высокой концентрацией в $L \times L$ ячейках. За время $T = 20$ лет таких последовательностей мало, и поэтому оценки вероятностей больших значений ξ_L могут быть очень неустойчивыми. Неформально метрику Леви можно определить как максимальную длину отрезка с направлением (-1) , соединяющего две сравниваемые функции распределения (см. отрезки (α, β) на рис. 6). Разным $L = 10, 20, 40, 80, 100$ отвечают разные функции распределения. Максимум из попарных расстояний принимается за меру разброса (δ_c) распределений $\lg \xi_L$, которые связаны с показателем c .

На рис. 6,а (случай $p = 0$) величина δ_c монотонно убывает с ростом показателя c и достигает минимума при $c = 2$, который совпадает с прогнозным значением $c = \dot{\tau}(0)$. Случай $p = 1$ (рис. 6,б) более тонкий, поскольку ожидаемое значение $c = \dot{\tau}(1) = 1.35$ находится внутри интервала $(1, 2)$. С ростом показателя c наибольшее расхождение распределений плавно перетекает из области малых ξ_L в область больших значений ξ_L . Положение равновесия достигается в интервале $1.1 \leq c \leq 1.35$, где минимум δ_c слабо выражен. Размытость второй оценки показателя c не мешает говорить, что обе оценки, отвечающие разным весам $L \times L$ ячеек, существенно различны. Напомним, что в случае монофрактальной сейсмичности они должны были бы совпасть; в случае би-фрактальной смеси (см. рис. 3 и *усложненный пример* в разд. 1.3) разброс δ_c при $p = 1$ должен был бы иметь два локальных минимума: вблизи $c = d_0$ и $c = d_2$. Этого мы не видим.

Таким образом, рис. 6 неплохо подтверждает теоретические выводы и поэтому является независимым аргументом в пользу мультифрактального поведения меры $\lambda(dg|m = 2)$ в диапазоне масштабов $\Delta L = (10-100)$ км. Из рис. 6,а следует также, что значение $c = 2$ больше претендует на роль подходящего значения c для шкалирования гистограммы чисел $\lambda(L \times L)$, чем значение $c = 1.6$, предложенное в [4].

Заключение

Мы стартовали с вопроса о наилучшем шкалировании интенсивности событий магнитуды $M \geq m$ в ячейке размера L , а именно – о подходящем показателе c в соотношении $\lambda(L \times L) \propto L^c$. Принимая гипотезу о мультифрактальности меры интенсивности $\lambda(dg|m)$, мы показали, что задача не имеет единственного решения и требует уточнения конечной цели. Так усредненное значение $\lambda(L \times L)$ по всем непустым ячейкам шкалируется с помощью $c = d_0$, где d_0 – боксовая размерность носителя $\lambda(dg|m)$, а среднее значение $\lambda(L \times L)$ с учетом весов, пропорциональных сейсмической активности $L \times L$ ячеек, требует $c = d_2$, где d_2 – корреляционная размерность. Если мы хотим, чтобы распределения нормализованных величин $\lambda(L \times L)/L^c$ были близки при разных L (в идеале они могут следовать унифицированному закону), тогда $c = \dot{\tau}(0)$ (см. разд. 1.3). Это же распределение можно построить с учетом веса ячейки $L \times L$, пропорционального активности в $L \times L$, т.е. так же, как мы определяли альтернативное среднее чисел $\lambda(L \times L)$. Тогда $c = d_1$, где d_1 – информационная размерность.

Гипотеза мультифрактальности является дискуссионной. Полемика связана с достоверностью оценок скейлинговых индексов $\tau(q)$ для меры $\lambda(dg|m)$. Поэтому в работе уделено специальное внимание методике оценивания $\tau(q)$. На данных по Калифорнии (каталог ANSS [28]) мы показали, что мера $\lambda(dg|m = 2)$ демонстрирует мультифрактальное поведение в интервале масштабов $\Delta L = (10-100)$ км. Точнее, $\tau(q)$ устойчиво оценивается для $0 \leq q \leq 3$ в указанном диапазоне ΔL . При этом все перечисленные размерности различны: $\dot{\tau}(0) \cong 2$, $d_0 \cong 1.8$, $d_1 \cong 1.35$ и $d_2 \cong 1.1$. Независимый анализ распределений $\lambda(L \times L)/L^c$ (построенных с равными и неравными весами) неплохо подтверждает теоретический прогноз параметра c , при котором это распределение слабо зависит от L . Предсказание является точным в случае равных весов $c = \dot{\tau}(0) \cong 2$, и приближенным – в противном случае, а именно, $1.1 \leq c \leq 1.35$ при теоретическом значении $c = \dot{\tau}(1) \cong 1.3 - 1.4$. Этот результат усиливает позиции мультифрактальной гипотезы в диапазоне масштабов $\Delta L = (10-100)$ км. Можно сказать иначе: мультифрактальная идеология оказалась эффективной в задаче шкалирования пространственной

интенсивности событий. При этом боксовый подход к оцениванию тау-функции как нельзя лучше согласован с самой проблемой шкалирования. Независимо от интерпретации результата, напрашивается следующий практический вывод: там, где используется шкалирование сейсмической активности по пространству, показатель s должен рассматриваться как параметр. В настоящее время операция шкалирования используется при анализе унифицированных законов [3, 4], в некоторых методах прогноза [29] и способах выделения афтершоков [2, 10].

В данной работе оставлен без ответа вопрос, как параметр s или, в частности, боксовая размерность d_0 зависят от пороговой магнитуды m . Строгое решение вопроса связано с большими трудностями. С ростом m прямой анализ скейлинговых индексов затруднен по статистическим причинам (см. пример на рис. 3). Для больших событий приходится считаться с размерами очага. Поэтому, следуя соображениям подобия, с ростом пороговой магнитуды m надо увеличивать размеры пространства, что порождает проблему неоднородности каталогов. Развитая теория в [30] о приуроченности сильных землетрясений к линейным элементам высокого ранга и их пересечениям косвенно указывает на то, что размерность d_0 должна уменьшаться с ростом магнитуды. В глобальном масштабе очаги сильнейших событий следуют границам плитовой тектоники, размерность которых в том же масштабе естественно ассоциировать с 1, если говорить о пересечении их с поверхностью Земли. В целом высказанная гипотеза требует серьезной статистической проверки.

Финальная версия статьи сильно отличается от исходной, благодаря критике и конструктивным замечаниям, которые авторы получили от анонимных рецензентов и своих коллег В. Кособокова и М. Шнирманна.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект N 05-05-64384 РФФИ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Abe S., Suzuki N. Scale-invariant statistics of the degrees of separation in directed earthquake network // 2004. ArXiv: cond-mat / 0402226.
2. Baiesi M., Paczuski M. Complex networks of earthquake and aftershocks // 2004. ArXiv: physics / 0408018.
3. Bak P., Christensen K., Danon L., Scanlon T. Unified scaling law for earthquakes // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol.88. P.178501.
4. Corral A. Local distributions and rate fluctuations in a unified scaling law for earthquakes // Phys. Rev. E. 2003. Vol.68. P.035102 (R).
5. Corral A. Universal local versus unified global scaling laws in the statistics of seismicity // 2004. ArXiv: cond-mat / 0402555.
6. Tosi P., De Rubeis V., Loreto V., Pietronero L. Influence length and space-time correlation between earthquakes // 2004. ArXiv: physics / 0409033.

7. Кейлис-Борок В.И., Кособоков В.Г., Мажженов С.А. О подобии в пространственном распределении сейсмичности // Теория и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1989. С.28–40. (Вычисл. сейсмология; Вып.22).
8. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D. 1983. Vol.9. P.189–208.
9. Кособоков В.Г., Некрасова А.К. Общий закон подобия для землетрясений: глобальная карта параметров // Анализ геодинамических и сейсмических процессов. М.: Геос. 2004. С.160–175. (Вычисл. сейсмология; Вып.35).
10. Baiesi M., Paczuski M. Scale free networks of earthquake and aftershocks // Phys. Rev. E. 2004. Vol.69. P.066106.
11. Pisarenko V.F., Golubeva T.V. Application of stable laws in seismicity modeling // Computational seismology and Geodynamics. 1996. Vol.4. P.127–137.
12. Molchan G.M. Interevent time distribution of seismicity: a theoretical approach // PAGEOPH. 2005. Vol.162. 16 p.
13. Geilikman M.B., Golubeva T.V., Pisarenko V.F. Multifractal patterns of seismicity // Earth Planet. Sci. Lett. 1990. Vol.99, N 1/2. P.127–132.
14. Hirata T., Imoto M. Multifractal analysis of spatial distribution of microearthquakes in the Kanto region // Geophys. J. Inter. 1991. Vol.107. P.155–162.
15. Hirabayashi I., Ito K., Yoshii T. Multifractal analysis of earthquakes // PAGEOPH. 1992. Vol.138. P.591–610.
16. Godano C., Tosi P., De Rubeis V., Augliera P. Scaling properties of the spatio-temporal distribution of earthquakes: a multifractal approach applied to a California catalogue // Geophys. J. Inter. 1999. Vol.138. P.99–108.
17. Gonzato G., Mulargia F., Marzocchi W. Practical application of fractal analysis: problems and solutions // Geophys. J. Inter. 1998. Vol.132. P.275–282.
18. Eneva M. Effect of limited data sets in evaluating the scaling properties of spatially distributed data: an example from mining-induced seismic activity // Geophys. J. Inter. 1996. Vol.124. P.773–786.
19. Gorski F.Z. Pseudofractals and the box counting algorithm // J. Phys. A.: Math.Gen. 2001. Vol.34. P.7933–7940.
20. Molchan G.M., Turcotte D. A stochastic model of sedimentation: probabilities and multifractality // Euro. Jnl. of Applied Mathematics. 2002. Vol.13. P.371–383.
21. Feder J. Fractals // 1988. New York: Plenum Press. 283p.
22. Pesin Y., Weiss H. A multifractal analysis of equilibrium measures for conformal expanding maps and Moran-like geometric constructions // J. Stat. Phys. 1997. Vol.86, Nos.1/2. P.233–275.
23. Mandelbrot B.B. Multifractal measures for the geophysicist//PAGEOPH. 1989. Vol.131. P.5–42.
24. Molchan G.M. Scaling exponents and multifractal dimensions for independent random cascades // Commun. Math. Phys. 1996. Vol.179. P.681–702.
25. Kagan Y. Fractal dimension of brittle fracture // J. Nonlinear Sci. 1991. Vol.1. P.1–16.
26. Nerenberg M.A., Essex C. Correlation dimension and systematic geometric effects // Phys. Rev. A. 1990. Vol.A42. P.7065–7074.
27. Frisch U. Turbulence: the legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Cambridge Univ. press. 1996. 296 p.
28. ANSS composite earthquake catalog // 2004. quake.geo.berkeley.edu/anss.
29. Baiesi M. Scaling and precursor motifs in earthquake networks // 2004. ArXiv: cond-mat / 0406198.
30. Gorshkov A., Kossobokov V., Soloviev A. Recognition of earthquake-prone areas / Keilis-Borok V.I. and Soloviev A.A. (eds.) // Nonlinear dynamics of the lithosphere and earthquake prediction. 2003. Springer. P.239–310.