УДК 550.310:517.984 54

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ СЕЙСМОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.Н. КУЗНЕЦОВ

Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики Российской академии наук, Москва

Предлагается прямой и гибкий метод решения прямых и обратных матричных задач Штурма–Лиувилля. Он состоит из последовательного применения к уравнениям упругости не обязательно канонических преобразований Фурье–Лапласа (W-преобразований, в честь Г. Вейля) и решения одного матричного уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. W-преобразование матричной функции одной переменной – это интеграл от ее произведения на матричную функцию, которая зависит еще от спектрального параметра некоторой задачи Штурма–Лиувилля S. В качестве такой функции обычно берется специальное решение задачи Коши для выбранного оператора Штурма–Лиувилля. Данные Коши для нее согласуются с одним из краевых условий задачи S. Простейший оператор – вторая производная – оказался пригодным для широкого класса скалярных и матричных задач, в том числе для сейсмологических. Процедура применима и к несамосопряженным задачам и к задачам, в которых краевое условие зависит от спектрального параметра. Главное требование на строящиеся W-преобразования – их обратимость. Стала яснее роль уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Оно связывает две матричные функции двух переменных. Одна из них есть искомое решение некоторой нелинейной задачи, а другая – линейной. В сейсмологическом случае задача для второй функции свелась к матричному уравнению в свертках, а оно, уже классически, преобразуется к уравнению – аналогу характеристического уравнения, которое решается алгебраически. Прослеживается полная цепь преобразований от заданной сейсмограммы, которая удовлетворяет уравнениям линейной упругости в плоско или сферически слоистой среде, до снова сейсмограммы, синтетической, вычисленной после восстановления среды. Уточнен ряд моментов в известной процедуре сведения системы уравнений упругости в слоистых средах к матричным задачам Штурма–Лиувилля.

DIRECT AND INVERSE SEISMOLOGICAL PROBLEMS AND THEIR TRANSFORMATIONS

A.N. KUZNETSOV

International Institute of Earthquake Prediction Theory
and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow

The direct and flexible method for the solution of direct and inverse matrix Sturm–Liouville problems is proposed. The method uses consecutive application Fourier–Laplace transformations (W-transformations, in honour H. Weyl), not necessarily canonic, and solution of a matrix Gelfand–Levitan–Marchenko equation once to elasticity equations. W-transformation of one variable matrix function is an integral of it's products with matrix function, which depends on spectral parameter of some Sturm–Liouville problem S.

The last function is usually a special solution of Cauchy problem for the chosen Sturm–Liouville operator. As a rule Cauchy data are consistent to one of the boundary conditions for the problem S. Operator of the second derivative, the simplest one, is suitable for a wide class scalar and matrix problems including seismological ones. Procedure is applicable both to not selfadjoint problems and to problems in which the boundary conditions depend on spectral parameter. The main requirement on the constructed W-transformations is their invertibility. The role of Gelfand–Levitan–Marchenko equation became more clear. It connects two matrix functions of two variables. First of them is required solution of some nonlinear problem while the problem for the second function is linear. In a seismological case the problem for the second function is reduced to the matrix equation in convolutions, which is transformed, now classically, to the equation similar to the characteristic equation. The last is solved algebraically. The full circuit of transformations from given seismogram, which satisfies linear elasticity equations in plain or spherically layered medium, up to new seismogram, the synthetic one, calculated after reconstruction of a medium is traced. Some points are refined in known procedure for the reduction of the elasticity equations in layered media to Sturm–Liouville matrix problems.

Введение

В статье [1] была исследована схема Гельфанда–Левитана–Марченко решения спектральных обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля. Ее без изменений удалось приспособить для решения задачи, связанной с уравнением для сейсмической волны Лява. Было показано, что наличие изломов на графике модуля сдвига не катастрофично для метода. Остался невыясненным вопрос, как следует действовать в случае, когда этот модуль разрывен. Логика самого исходного метода Гельфанда–Левитана–Марченко осталась для автора во многом загадочной.

Прямое перенесение схемы на задачу Рэлея (см. [2, 3]) невозможно по двум главным причинам. Первая – это несамосопряженность, вторая – зависимость краевого условия от волнового числа. Самосопряженность исходной системы уравнений задачи Рэлея (см. [4]) теряется после преобразования ее к матричному уравнению Штурма–Лиувилля [5]. Здесь же возникает и вторая причина. Задумывалось же (В. М. Маркушевичем) это преобразование как первый шаг в процедуре применения к системе Рэлея метода Гельфанда–Левитана–Марченко. Результат, тем не менее, оправдал надежды (см. [6–8]). Главную роль в успехе, видимо, сыграло сосредоточение в одной матрице-потенциале разбросанных по системе Рэлея параметров среды. В работе [8] методом, который не будет большой ошибкой назвать альтернативным классическому, решена обратная задача Рэлея с гладкими параметрами среды именно для преобразованного матричного уравнения Штурма–Лиувилля. Значительное место в обширной по объему статье уделяется учету специфических особенностей получившейся матричной краевой задачи. Разыскиваются, например, свойства функции Вейля (которая определяет данные рассеяния обратной задачи и вычисляется по колебаниям поверхности Земли), происходящие из того, что матрица-потенциал зависит только от трех независимых функций, что между этой матрицей и матрицей граничных условий есть связь. Украшение формул результата – уравнение по внешности совпадающее с уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко, возможно, в чем-то ему аналогичное. Эти подробности замечательны сами по себе, как достигнутые результаты, но они оборачиваются трудностями, когда ставится вопрос о численной реализации алгоритма или его применении к другим задачам, поскольку вплетены в ткань вывода формул решения обратной задачи. Вряд ли целесообразно программировать одни лишь конечные формулы и пробовать вычислять по такой программе, малейшее затруднение приведет к необходимости вспоминать детали вывода.

В идеале хотелось бы иметь естественный или систематический метод обращения краевых задач Штурма–Лиувилля, не содержащий хотя бы логических загадок; общий, т. е. свободный от специфических подробностей той или другой задачи и, одновременно, открытый к обогащению такими подробностями в случае необходимости; не привязанный к гладкости потенциала – это единственное специальное требование; легко программируемый, ибо уже ясно, что трудности этой задачи лежат не в отладке программ; исследовательский, позволяющий какое-то время находить ответы на новые вопросы. Таким образом, чисто численные методы, например – типа метода наименьших квадратов, оказываются вне сферы наших интересов, хотя мы не оспариваем их численной эффективности.

Выбирая подход, который обещал бы продвижение в этом направлении, мы рассматриваем идею, которая была реализована в статье [9] в более простой ситуации лучевой задачи. Идея крайне проста: к системе уравнений волнового поля, включая граничные условия, добавляются данные рассеяния, которые имеют вид краевого условия – это просто значения на границе заведомо существующего волнового поля – сейсмограммы, зарегистрированные в каждой точке земной поверхности. Обратная и прямая задачи тогда будут различаться тем, что в прямой задано больше. Обратная задача нелинейна: требуется определить коэффициенты уравнения так, чтобы существовало волновое поле с данными граничными значениями. Оказалось, что этот набор полевых и граничных уравнений можно преобразовать к разрешимой задаче. Если исходная задача – обратная, параметры упругой среды неизвестны, то решение преобразованной задачи определит некоторую среду, возможно, что и не физическую, но в ней будет существовать волновое поле, совпадающее на поверхности с исходным. Если же среда известна, то ответ преобразованной задачи будет содержать параметры новой среды. В обоих средах будут существовать поля с заданной сейсмограммой. Если сейсмограмма однозначно определяет среду, то новая среда совпадет с заданной. Вопросы о существовании и свойствах таких сейсмограмм оставим в стороне и сосредоточимся исключительно на преобразовании. Оказалось, что оно состоит из цепи W-преобразований (см. абстракт) и одного уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко. Обобщенные преобразования Фурье–Лапласа–Штурма–Лиувилля–Вейля именуем W-преобразованиями, так как они, вероятно, были изобретены Г. Вейлем (см. [10, 11]).

1. Схема преобразований общей сейсмологической задачи

Для наглядности и удобства дальнейшей ориентировки в происходящем представим эту схему диаграммой:

$$u(x_\star, t) \xleftrightarrow{W_1} v(x,\xi,\alpha,\omega) \xleftrightarrow{Q} y(x,\xi,\alpha,\omega) \xleftrightarrow{W_2} K(x,t,\alpha,\omega) \xleftrightarrow{E_{GLM}}$$
$$\xleftrightarrow{E_{GLM}} F(x,t,\alpha,\omega) \xleftrightarrow{D} Z(x,\alpha,\omega) \xleftrightarrow{W_3} \widehat{Z}(p,\alpha,\omega). \qquad (1)$$

Объекты диаграммы – это искомые переменные сейсмологической задачи, которые преобразуются одна в другую операторами, обозначенными стрелками. Стрелки направлены в обе стороны, но это не означает, что каждое из соответствий взаимно-однозначно. Такое может случиться лишь когда задача поставлена совсем корректно. В скобках стоят аргументы, от которых зависит каждая неизвестная. Без нужды в такой полноте аргументы больше выписываться не будут. Каждая функция подчинена своей системе уравнений с левой и правой частью, например, $\mathbf{S}_u[u] = \mathbf{S}_{ru}[u]$. В число этих уравнений включены и граничные, и начальные условия, а не одни полевые уравнения. В этом разделе будут лишь определены элементы диаграммы. Затем каждое преобразование будет рассмотрено с надлежащей подробностью, и работоспособность диаграммы будет продемонстрирована на примере решения обратной сейсмологической задачи в непрерывно слоистой среде, постановка которой была сформирована в целом ряде работ, из которого в наш список попали [6–8, 12, 13].

Волновое поле смещений $u(x_\star, t)$, $x_\star = (x_1, x_2, x_3)$ должно быть определено в области полупространства, шара или цилиндра и на отрезке времени. Его значения в отдельных точках на границе или вблизи нее непрерывно регистрируются сейсмографами. Они являются данными рассеяния в нашей обратной задаче. Пространственный вектор x помечен точкой-индексом, чтобы отличить его от скалярной координаты x в следующем элементе диаграммы. Поле $u = u_{\star\star}$ также будет пространственным вектором, но нам потребуется сразу три его экземпляра, чтобы можно было составить из них квадратную матрицу. Поэтому u зависит от двух индексов. Так как в слоистой среде задача распадается на двумерную и одномерную, то (3×3)-матрицу можно составить из двух независимых сейсмограмм. По той же причине, начиная с этого момента, мы имеем дело только с трехмерными матрицами, составленными из двух блоков: одномерного (Лява) и двумерного (Рэлея). Происхождение этого поля нас не заботит, но для упрощения изложения будем рассматривать область без источников. Ясно, что без источников не обойтись, просто они находятся за границами области. Таким образом, наша сейсмологическая задача не стационарная, а динамическая – и в постановке своей – не содержит каких-либо ограничений на сейсмограмму. Уравнения для u – это система уравнений линейной изотропной упругости, плюс условия на границах, плюс данные рассеяния (сейсмограммы). Параметры Ламе и плотность среды, входящие в эти уравнения, могут быть известны (в прямой задаче) и неизвестны (в задаче обратной). В правых частях этих уравнений u отсутствует.

В непрерывно слоистой среде разделением переменных (т. е. W-преобразованием W_1) задача приводится к системе $\mathbf{S}_v[v] = \mathbf{S}_{rv}[v]$ – (3×3)-матричному обыкновенному уравнению по x с параметрами ξ, α, ω плюс граничные условия. Правые части здесь существенно зависят от v, так как перед W-преобразованием (W_1 – либо классическое преобразование Фурье – Лапласа по горизонтальным переменным, либо разложение по специальным функциям) приходится срезать функцию u. Таким образом, без своего рода источников, распределенных по границам области (включая временную), обойтись не удается. Параметры уравнения: ξ – волновое число, α – угол, направление составляющей волнового вектора, касательной к слою, ω – частота. Переменная x – либо глубина в полупространстве, либо $x = -\ln r/r_0$, где r – переменный радиус шара или цилиндра, r_0 – внешний радиус. Идея этого преобразования ясна – свести уравнения с частными производными к обыкновенным.

Q – дифференциально-матричное преобразование подобия (иначе сказать, линейная замена неизвестной, содержащая производную по x). Матрица y удовлетворяет матричной краевой задаче Штурма–Лиувилля с потенциалом $q(x)$. Здесь же можно избавиться от правых частей в уравнениях для y (кроме данных рассеяния, конечно). Идея – максимальное упрощение формы результата разделения переменных.

W_2 – специально подобранное обратное матричное W-преобразование от волнового числа ξ к вещественной переменной t, которая, понятно, здесь уже – не время. Все матричные W-преобразования применяются справа. Функция $K(x,t)$ – регулярная часть W_2-оригинала функции $y(x, \xi)$. Его сингулярная часть равна $\delta(x-t)$ (δ – функция Дирака). $K(x,t)$ однозначно определяется из неклассической краевой задачи возмущенного двумерного оператора Даламбера

$$\begin{aligned}
&K_{,xx} - K_{,tt} + q_1(x)\,K - K\,q_2(t) = 0,\\
&2(K(x,x))_{,x} + q_2(x) - q_1(x) = 0,\\
&K(x,\infty) = 0, \quad K_{,t}(x,\infty) = 0
\end{aligned}$$

и плюс к этому могут быть заданы функции $K(0,t)$, $K_{,x}(0,t)$, q_1 (где q_1 – это наше q, а q_2 – матричный потенциал W_2-задачи Штурма–Лиувилля). Таким образом, прямая задача (когда q – известен, а данных рассеяния $K(0,t)$, $K_{,x}(0,t)$ может не быть) трансформировалась в линейную задачу, а обратная (когда q – неизвестен, но зато есть данные рассеяния) – в нелинейную. Здесь с идеей не просто. Может быть, принцип: делай W-преобразование, когда можно, и смотри, что получится? Или дело в том, что оператор Даламбера с потенциалом проще исходных уравнений упругости? Следующий шаг – оправдание.

Преобразование E_{GLM} связывает искомые функции K и F уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K(x,t) + F(x,t) + \int\limits_x^\infty K(x,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Обратная задача для F – линейна:

$$\Box F + q_2(x)\,F - F\,q_2(t) = 0,$$

$$F(x,\infty) = 0, \quad F(\infty,t) = 0, \quad F_{,x}(\infty,t) = 0,$$

$$K(0,t) + F(0,t) + \int\limits_0^\infty K(0,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s = 0,$$

$$F_{,x}(0,t) - (\zeta + K(0,0))\,F(0,t) + \eta\Bigg(G(t) + \int\limits_0^\infty G(s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s\Bigg) = 0.$$

Прямая задача – тем более линейна. Она включает само уравнение

$$K(x,t) + F(x,t) + \int\limits_x^\infty K(x,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s = 0$$

с известным ядром K. F от q зависит только через K, в том числе – через данные рассеяния. В рассмотренном примере – сейсмологической задаче для непрерывно слоистого шара – полевое уравнение для $F(x,t)$

оказалось классическим уравнением Даламбера. Идея этой замены неизвестных нам не ясна, но результат впечатляет. Особенно в нашем примере.

Операция D решает полевое уравнение для F, т. е. в примере F выражается через (матричные) функции одной переменной $Z(x)$ – бегущие вправо и влево волны. Что делать в более сложных случаях обсуждать не будем, хотя это хорошо известно. В нашем примере чудесным образом данные рассеяния превратились в сверточные уравнения для Z, которая состоит из трех матричных компонет: $Z = (U, V, W)$.

Последнее преобразование в диаграмме W_3 – классическое преобразование Лапласа. В примере получаем для изображений волн U, V, W линейную алгебраическую систему, определитель которой может быть назван характеристическим многочленом обратной задачи. Решение U, V зависит от произвольной матричной функции W на полупрямой, очень быстро убывающей (ее преобразование Лапласа должно быть определено во всей комплексной плоскости).

Обсудим коротко детали этой логики. Теперь, если мы сумели добраться до конца диаграммы, можно, двигаясь обратно, найти q, параметры среды и поле u, определяющее синтетическую сейсмограмму. Сейсмологическую задачу можно определить как корректно поставленную, если после завершения этого круга синтетическая сейсмограмма совпадет с исходной, а найденные параметры среды – с заданными.

Волновое поле и его трансформанты зависят от параметров α и ω, а параметры среды – нет. Однако эта схема восстановления параметров вовсе не гарантирует этой независимости. Возможно, что достигнуть ее можно с помощью функции W. Но, может быть, эта задача частично решится посредством ограничений на сейсмограммы. Возможно, что далеко не каждая функция способна стать сейсмограммой.

Самосопряженность краевой задачи для y в изложенном алгоритме ни необходима, ни полезна. Итак, для трехмерной системы линейной упругости в слоистой среде трех типов – плоско, сферически и цилиндрически – эта схема решения обратной задачи может быть реализована почти рутинно. Мы приведем все ее существенные подробности. На первом шаге, ввиду громоздкости преобразований, ограничим изложение плоским случаем.

2. Преобразование уравнений упругости

Рассмотрим волновое поле смещений $u(x_\star, t)$, $x_\star = (x_1, x_2, x_3)$ в области полупространства $x_1 \geq 0$. Его значения на границе $u(0, x_2, x_3, t)$, взятые в двух экземплярах, и будут данными рассеяния в нашей обратной задаче. Рассматривается область $|x_2|, |x_3| \leq l$ или $x_2^2 + x_3^2 \leq l^2$, $0 \leq x_1 \leq l_1$, где среда упруга, изотропна и плоско слоиста, величины l и l_1 могут быть равны ∞. Временной отрезок также, естественно, ограничен. Тогда [2] сейсмическое поле подчиняется системе

$$\mathbf{E}[u] \stackrel{\text{def}}{=} \rho \ddot{u}_i - (\lambda u_{k,k})_{,i} - (\mu u_{i,j})_{,j} - (\mu u_{j,i})_{,j} = 0, \tag{2}$$

где $\rho(x)$ – плотность, $\lambda(x)$ и $\mu(x)$ – коэффициенты Ламе; все эти функции зависят только от одной переменной $x = x_1$. Запятой в индексе отделяется номер координаты или сама координата, по которой величина дифференцируется; повторение индекса в мономе предполагает суммирование мономов по значениям этого индекса: 1, 2, 3 в данном случае. Граница области будет предполагаться свободной, это значит, что сила, приложенная к ее элементу, равна нулю:

$$n_i t_{ij} = 0, \tag{3}$$

где n_i – поле единичных нормалей к границе, $t_{ij} = \lambda u_{k,k}\delta_{i,j} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})$ – тензор напряжений. На поверхности ($x = 0$) это условие обычно для сейсмологии, на другой стороне слоя ($x = l_1$) условие может быть другим или неизвестным.

2.1. Разделение переменных в слоистых средах

Принято [2–5] раскладывать поле по осесимметричным решениям краевой задачи, которые выражаются через функции Бесселя. Здесь оно будет разложено на плоские волны. Эта процедура кажется более простой хотя бы потому, что она не требует перехода к цилиндрическим координатам. К системе (2) просто применяется преобразование Фурье по координатам t, x_2, x_3. Правда из-за того, что поле может быть определено только в ограниченной области изменения этих переменных, процедура несколько усложнится. Результаты разложений в обоих методах буквально совпадают – получается одна и та же краевая задача для системы обыкновенных уравнений с параметрами. Это объясняется тем, что плоская волна симметрична относительно поворотов вокруг оси, унесенной в бесконечность. Так как уравнения для u симметричны относительно сдвигов по горизонтали, этот результат не зависит как от выбора вертикальной оси симметрии, так и от направления фронта плоской волны. Итак, умножим векторное уравнение (2) на срезающую функцию $H_1(x_2, x_3, t)$ и применим преобразование Фурье. Срезающая функция равна произведению характеристических функций отрезков осей x_2, x_3, t на произведении которых определена u. Можно пользоваться и гладкой срезающей функцией. Коммутатор $f \stackrel{\text{def}}{=} H_1\mathbf{E} - \mathbf{E}H_1$

сосредоточен в концах отрезков. В процедуре решения обратной задачи им можно пренебречь, как будет видно. Его выражение через граничные значения поля потребуется, если мы захотим, решив обратную задачу, это поле восстановить. Получаем:

$$\widehat{\mathbf{E}}\widehat{H_1 u} = \widehat{f}\,,$$

где оператор $\widehat{\mathbf{E}}$ получается из $\mathbf{E}$ заменами дифференцирований по x_2, x_3, t на символы $\mathrm{i}\xi_2$, $\mathrm{i}\xi_3$, $\mathrm{i}\omega$. Представим пространственную часть преобразования Фурье в виде разложения на плоские волны, перейдем в нем к полярным координатам: $\xi_2 = \xi\cos\alpha$, $\xi_3 = \xi\sin\alpha$, а оси x_2, x_3 повернем на угол α: $x_2 = y\cos\alpha - z\sin\alpha$, $x_3 = y\sin\alpha + z\cos\alpha$. Это же преобразование $x_\star = S_\alpha(x_1, y, z)^T$ необходимо совершить и с вектором смещений $H_1 u = S_\alpha w$, чтобы сохранить вид оператора $\mathbf{E}$, который, как известно, инвариантен относительно одновременных ортогональных (постоянных) преобразований зависимых и независимых пространственных переменных:

$$\mathbf{E}(x_1, y, z)[S_\alpha w(x_1, y, z)] = S_\alpha \mathbf{E}(x_1, y, z)[w(x_1, y, z)].$$

Так как $x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = \xi y$, то преобразование Фурье произвольной функции $v(x_2, x_3)$ имеет вид:

$$\widehat{v} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(S_\alpha(y, z))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi\,y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (v(S_\alpha(y, z)))\widehat{\ }(\xi, 0). \tag{4}$$

Итак, волновое поле u умножается на срезающую функцию и делится на матрицу S_α, координаты x_1, x_2, x_3 заменяются на x y, z, по последним делается преобразование Фурье $x \to \xi$, $y \to \eta$, в котором полагается $\eta = 0$. Поле u превращается в целое семейство (по α) трансформант $v(x, \xi, \omega, \alpha)$, каждая из которых удовлетворяет системе, распадающейся на систему Рэлея и уравнение Лява (обозначаем $\nu = \lambda + 2\mu$):

$$\begin{gathered}
\omega^2\rho v_1 + (\nu(v_{1,x}))_{,x} + \mathrm{i}\xi((\lambda v_2)_{,x} + \mu v_{2,x}) - \xi^2\mu v_1 = f_1,\\
\omega^2\rho v_2 + (\mu v_{2,x})_{,x} + \mathrm{i}\xi(\lambda v_{1,x} + (\mu v_1)_{,x}) - \xi^2\nu v_2 = f_2,\\
\omega^2\rho v_3 + (\mu v_{3,x})_{,x} - \xi^2\mu v_3 = f_3.
\end{gathered} \tag{5}$$

Эквивалентным образом эта система получается переходом к символам дифференцирований из системы (2), в которой все производные по x_3 приравняли нулю:

$$\begin{gathered}
\rho\ddot{w}_i - (\lambda w_{k,k})_{,i} - (\mu w_{i,j})_{,j} - (\mu w_{j,i})_{,j} = 0, \qquad i, j, k \in (1, 2),\\
\rho\ddot{w}_3 - (\mu w_{3,j})_{,j} = 0, \qquad j \in (1, 2).
\end{gathered} \tag{6}$$

Правые части зависят от значений волны u на границах пространственной и временно́й областей. Их обычно отбрасывают либо наивно предполагая, что волна u "затухает" на границах, либо обоснованно считая, что существуют решения однородной краевой (по x) задачи для системы (5), которым соответствуют волны u во всем пространстве (не срезанные). На такие волны пересчитываются данные рассеяния, которые превращаются в функцию Вейля–Титчмарша, в спектральную функцию или используются более непосредственно, так что в решении обратной задачи можно обойтись без $f_\star$.

Из собственных функций v однородной задачи для (5) можно строить синтетические сейсмограммы u. Но если поставить задачу о восстановлении исходного поля u, то без $f_\star$ не обойдешься. Для системы (5) в этом случае придется найти фундаментальное решение и с его помощью, методом вариации постоянных, свести неоднородную задачу к системе интегральных уравнений Вольтерры. Подчеркнем еще раз, что решения сразу не получается, потому что правая часть $f_\star$ зависит от неизвестной v, так как она зависит от значений u на границах области и временно́го отрезка. Вольтерровыми эти уравнения будут, только если рассматривается задача Коши – восстановление волны от границы.

Краевые условия (3) на горизонтальной границе, когда $n_i = (1,0,0)$, имеют вид $t_{1j} = 0$, при $x_1 = 0$, или для плоской волны:

$$\begin{aligned} \nu u_{1,1} + \lambda u_{2,2} &= 0, \\ \mu u_{1,2} + \mu u_{2,1} &= 0, \\ \mu u_{3,1} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

и для ее трансформанты (при $x = 0$, конечно же):

$$\begin{aligned} \nu v_{1,x} + \mathrm{i}\xi\lambda v_2 &= g_1, \\ \mu v_{2,x} + \mathrm{i}\xi\mu v_1 &= g_2, \\ v_{3,x} &= g_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Данные рассеяния для функции $v(x)$ означают, что известно $v(0)$. Зная ее, из граничного условия (8) можно найти производную $v_{,x}(0)$, из полевого уравнения – вторую $v_{,xx}(0), \ldots$, словом, разложение Тейлора $v(x)$ в нуле (если, конечно, параметры среды известны на поверхности с производными).

Для получения точного соответствия со схемой решения обратной задачи, изложенной в [1] или [14] для скалярного уравнения, лучше применять по y преобразование Лапласа. Ясно, что для этого срезающую функцию H_1 можно умножить еще на функцию Хевисайда $H(y)$, но можно сдвинуть начало координат на оси y в левый конец отрезка оси y, на котором определена u. Уравнения останутся теми же, только ξ заменится на $\mathrm{i}k$, так что мнимости исчезнут при вещественных k.

2.2. Дифференциально-матричные преобразования системы Рэлея и уравнения Лява

Эти преобразования преследуют цель – свести задачи (5) для v к задачам Штурма – Лиувилля, систему Рэлея, естественно, – к матричной. Случай Лява прост хотя и неприятен, когда μ имеет разрывы [1,12]. Полагая $v_3 = \mu^{-1/2}\, y$, находим:

$$\begin{aligned} &y'' + q\, y - \xi^2 y = f_3, \qquad x \geq 0,\\ &y'(0) - \theta\, y(0) = g_3, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} &q = \frac{1}{4}\mu^{-2}\mu'^2 - \frac{1}{2}\mu^{-1}\mu'' + \omega^2\rho\mu^{-1},\\ &\theta = 2\mu^{-1}(0)\mu'(0). \end{aligned} \tag{10}$$

Как теперь выяснилось, в случае Рэлея первый и решающий шаг состоит в исключении первой степени ξ. Шаг этот оказывается простым, благодаря тому, что ξ стоит на единственной побочной диагонали оператора. Обозначим преобразование подобия для матриц или операторов через $\mathrm{Int} ML = MLM^{-1}$. Очевидно,

$$\mathrm{Int}\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \xi b \\ \xi^{-1}c & d \end{pmatrix},$$

поэтому преобразование

$$\mathrm{Int} M_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Int}\begin{pmatrix} (\mathrm{i}\xi)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

оператора системы Рэлея из (5) достигает цели. Логика дальнейших действий проста. Надо разрешить систему относительно старшей (второй) производной, что не трудно, так как коэффициент при ней – хотя и дифференциальный, но обратимый оператор, на него можно поделить. Затем коэффициент при ξ^2 диагонализируется дифференциальным преобразованием подобия. Наконец, уничтожается член с первой производной. Однако из-за громоздкости матричных преобразований лучше следовать отлаженной схеме [5]. Там же можно найти подробности этих вычислений. Следуя [5], положим $\partial = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ и применим вслед за $\mathrm{Int} M_0$ преобразование $\mathrm{Int} Q \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Int}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \partial & 0 \end{pmatrix}$, результат таков:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \partial\mu\partial + \mu'\partial + \omega^2\rho - \xi^2\mu & -\partial\lambda - \mu\partial \\ -2\partial\mu'\partial + 2\xi^2\mu' - \omega^2\rho' & \partial\nu\partial + \partial\lambda' + \omega^2\rho - \xi^2\nu \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Сравнив оператор (11) с оператором (11) из [5], можно убедиться в совпадении результатов разложения сейсмической волны на осесимметрические и плоские волны, если говорить о левых частях уравнений. Уравнение Лява из (5) также совпадает с осесимметричным уравнением (1) в статье [1].

Оператор P_1 при $\xi = 0$ чудесным образом раскладывается на множители:

$$P_1 = (\partial M_1 + M_2)(\partial + M_3) - \xi^2 M_1.$$

Также неожиданно равенство коэффициентов при ∂^2 и при ξ^2.

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -2\mu' & \nu \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \mu' & -\nu \\ \omega^2\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \nu^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\omega^2\rho & \nu' \end{pmatrix}.$$

На следующем шаге достигается максимум простоты вида оператора в классе явных дифференциально-матричных преобразований. В операторе P_2 можно лишь один из элементов побочной диагонали умножить, а другой разделить на масштабирующий множитель, независящий ни от x ни от ξ.

$$P_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Int} M_4^{-1}\,(M_1^{-1} P_1) = (\partial - L + K)(\partial - L - K) - \xi^2,$$

где

$$M_4 = \begin{pmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu\nu^{-1} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\mu\nu^{-1}(\lambda+\mu) \\ (\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \mu^{-1}\mu' & -\frac{1}{2}\mu\nu^{-1}(\lambda + 3\mu) \\ (\mu^{-2}\omega^2\rho + (\mu^{-1})'') & -\mu^{-1}\mu' \end{pmatrix}.$$

Здесь появляется симметрия – след матрицы K равен нулю. От матрицы L можно избавиться только решив дифференциальное уравнение. В итоге получаем

$$P_3 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Int}_G^{-1}\, P_2 = (\partial + V)(\partial - V) - \xi^2 = \partial^2 - \xi^2 - U,$$

где матрица G – произвольное обратимое решение уравнения $G' = LG$, $V = \mathrm{Int} G\, K$, $\quad U = V' + V^2$. След матрицы V равен нулю, $\det G = const$. Далее нам потребуется только оператор P_3. Он имеет одинаковый вид во всех трех случаях слоистых тел: плоско, сферически и цилиндрически [5]. В последних двух средах координата x обозначает глубину по радиусу, $r = \mathbf{e}^{-x}$. Уравнению

$$P_3 y = f \tag{12}$$

удовлетворяет функция y, связанная с v обратимым соотношением

$$v = M_0\, Q\, M_4\, G\, y. \tag{13}$$

Правая часть, конечно, тоже преобразовалась, но обозначаться будет той же буквой.

Далее будет использоваться условие быстрого убывания потенциала U на бесконечности, когда рассматривается задача в полупространстве. Вряд ли оно существенно само по себе, но мы выбрали для изложения именно тот вариант метода, которым можно решать задачи с быстро убывающим потенциалом. Из написанных соотношений легко получить выражение

$$G\, U = K\, L - L\, K + (K^2 - K')\, G.$$

Исследуя выражения для K и L, можно прийти к выводу, что убывающему потенциалу трудно придать физический смысл. Стабилизации добиться можно. Вероятно, в таком предположении и следует решать плоские задачи. В сферически слоистом случае вид тех же матриц [5] показывает, что, когда μ стабилизируется вблизи центра, от потенциала можно добиться экспоненциального стремления к скалярной матрице – положительному числу. Эту матрицу можно, добавить к ξ^2 и получить быстро убывающий потенциал (подробности опустим). Но и здесь случай стабилизирующегося потенциала выглядит естественнее, так как переход к быстро убывающему сопряжен с особым на бесконечности преобразованием.

Пересчитаем теперь краевое условие (8) на функцию y. В него нужно подставить v из (13) и выразить вторые производные y из уравнения (12). Получим

$$y_x(0) - \theta\, y(0) = g, \tag{14}$$

где

$$\theta = \begin{pmatrix} -\mu^{-1}\mu' & \frac{1}{2}\mu^2\nu^{-1} \\ -2\xi^2\mu^{-1} + \omega^2\rho\mu^{-2} + (\mu^{-1})'' & 0 \end{pmatrix},$$

зависящая, как мы видим, от волнового числа, а g – новая правая часть. Подробности тоже весьма громоздких вычислений можно найти в [13]. Главный методический принцип вычислений – совершать подстановку

(13) не сразу, а шаг за шагом в четыре этапа, при первой возможности заменяя вторую производную промежуточной функции выражением для нее из полевого уравнения.

2.2.1. Преобразование данных рассеяния. Данные рассеяния становятся теперь двумя семействами функций $y(0,\xi,\alpha,\omega)$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,\xi,\alpha,\omega)$. Производную, разумеется, можно найти из граничного условия, а вторую – из уравнения. При вещественных ξ^2 их становится еще в два раза больше, так как вещественной системе удовлетворяют и вещественная и мнимая части y по отдельности.

Преобразуют данные рассеяния, чтобы избавиться от всего лишнего. Результатом оказывается величина, через которую выражают [8, 14] различные функции Вейля–Титчмарша. Рассуждение это проводится на схеме метода вариации постоянных для матричной системы с параметрами

$$\begin{aligned} &y'' + q\,y = f, \\ &y'(0) - \theta\,y(0) = g. \end{aligned} \tag{15}$$

Пусть дано решение y по крайней мере в виде ряда Тейлора до второй производной. Тогда

$$y = z_1\,v_1 + z_2\,v_2,$$

где $z_\star$ – фундаментальное решение однородного уравнения в (15), такое что $\det z_2 \neq 0$, $v_\star$ – варьируемые постоянные матрицы. Выделив в двух производных y производные $v_\star$ в отдельную систему, получим

$$\begin{aligned} y' &= z_1'\,v_1 + z_2'\,v_2 + a, \qquad & z_1\,v_1' + z_2\,v_2' &= a, \\ y'' &= z_1''\,v_1 + z_2''\,v_2 + f, \qquad & z_1'\,v_1' + z_2'\,v_2' &= f - a.' \end{aligned}$$

Краевое условие перепишется в виде

$$(z_1'(0) - \theta z_1(0))\,v_1(0) + (z_2'(0) - \theta z_2(0))\,v_2(0) = g - a(0).$$

Найдем теперь решение z однородной задачи (15), ясно, что

$$z = z_1 + z_2\,w.$$

Матрица w зависит только от параметров задачи (не от параметров среды, а от ξ,ω,α), она и будет искомой функцией Вейля. Соединив краевые условия для z и y, получим

$$(z_2'(0) - \theta z_2'(0))\,(-w\,v_1(0) + v_2(0)) = g - a(0).$$

Полагая, теперь $a(0) = g$, $v_1(0) = 1_M$, $(z_2'(0) - \theta z_2(0)) \neq 0$, получим $v_2(0) = w$ и

$$y(0) = z_1(0) + z_2(0)\, w = z(0). \tag{16}$$

Этим уравнением при любом выборе линейно независимых (над постоянными матрицами при умножении только справа) решений однородной задачи (15) данные рассеяния $y(0)$ определяют данные рассеяния $z(0)$ и функцию Вейля–Титчмарша w. Нам будет удобнее взять саму $z(0)$, после чего в вычислении w не будет надобности.

Обратно, если потенциал далее будет найден, то, располагая решениями z_1, z_2 и функцией $z(0)$ или функцией w, можно восстановить y, решая задачу Коши для уравнения, в котором правая часть, правда, тоже зависит от y.

В [8] функция Вейля W в наших обозначениях равна

$$W = z_2(0)(z_2'(0) - \theta z_2(0))^{-1} = -z_2(0)\, w\, (z_1'(0) - \theta z_1(0))^{-1} = w$$

при $z_2(0) = 1$, $z_1'(0) = -1$, $z_1(0) = 0$.

В работе [15] и др. из той же школы форма данных рассеяния в точности совпадает с нашей. Сама же работа с нашей имеет мало общего. Берется ступенчатая среда, в однородных слоях волновое поле имеет явный вид, на границах склеивается по непрерывности смещения и напряжения.

Когда задача решается в слое конечной или бесконечной глубины, функция z может выражаться через фундаментальное решение, определенное краевыми условиями на нижней границе.

В дальнейшем полевые и краевые уравнения и данные рассеяния для трансформант волн Лява и Рэлея будут рассматриваться при вещественных k и, следовательно, при мнимых $\xi = \mathrm{i}k$. Возможность и способ достижения такой ситуации уже изложены выше. В случае Рэлея неизвестные в уравнениях станут матричными, эти матрицы составляются из двух независимых столбцов-решений. Если все столбцы данных рассеяния при различных α, а также их вещественные и мнимые части окажутся зависимыми, придется разыскать другую волну u, иначе обратную задачу не поставить.

3. Интегральные преобразования матричной задачи Штурма–Лиувилля

Преобразования названы интегральными только потому, что они сопряжены с решением дифференциального или интегрального уравнения, и лишь в частности могут свестись к простому интегрированию, но не к умножению на матрицу. Рассмотрим (2×2)-матричную или одномерную однородную задачу Штурма–Лиувилля на начальном, конечном или бесконечном отрезке $[0, l]$ полупрямой $x \geq 0$:

$$P[y] = y'' + q\,y + k^2 y = 0, \tag{17}$$

$$Q_0[y] = y'(0) - \theta\,y(0) = 0, \tag{18}$$

$$Q_l[y](l) = 0. \tag{19}$$

Здесь $q(x)$ – матричная (в частности скалярная) функция, ее гладкость и поведение на бесконечности определятся в условиях и доказательствах последующих теорем; $\theta(k)$ – матричная постоянная (по x); волновое число k вещественным не предполагается; $y(x,k)$ – матрица; граничный оператор Q_l оставим пока без определения. При заданных q, $Q_\star$ решением прямой задачи называется $y(x,k)$ – невырожденная собственная (матричная) функция. На комплексной плоскости k она определена на множестве, которое называется спектром задачи. Определена с точностью до правого множителя, независящего от x. Дополним задачу сейсмологическими данными рассеяния. Как было выяснено – это значение в нуле по x функции $z(x,k)$, которая удовлетворяет в общем случае однородной (во всех трех уравнениях) задаче Штурма – Лиувилля при всех неотрицательных k. Если данные рассеяния известны и неизвестны ни $q(x)$ ни, следовательно, y, то решением обратной задачи называется функция $q(x)$.

3.1. W-преобразования Фурье–Лапласа–Вейля

Эти преобразования связываются с однородными задачами Штурма–Лиувилля (зависимость от задачи будем отмечать индексом W_s-преобразование) и имеют вид

$$\widehat{f}\,(k) = \int\limits_0^l f(x)\varphi(x,k)\,\mathrm{d}x. \tag{20}$$

Здесь φ – решение системы уравнений (17) и (18), нормированное условием: $\varphi(0,k) = 1_M$, (1_M – матричная единица). Функция φ становится собственной только на спектре задачи (17), (18), (19). В некоммутативном случае будет даже два преобразования – правое и левое. Если это уравнение можно решить относительно f, то может быть справедлива формула обращения

$$f(x) = (\,\widehat{f}\,(k))\widetilde{\ }(x) = \int\limits_0^\infty \widehat{f}\,(k)\psi(x,k)\,\mathrm{d}k. \tag{21}$$

Матричная плотность $\psi(x,k)$ может быть определена на части комплексной плоскости $\mathbf{C}_k$, содержащей спектр задачи. Интегрирование производится либо по спектру, либо по эквивалентной кривой, либо по всей комплексной плоскости и тогда оно интерпретируется с помощью теории обобщенных функций. В случаях неклассического W-преобразования нам придется интегрировать только по вещественной прямой, что и отражено в формуле. Это прямое и обратное преобразование существует, конечно, в некотором пространстве функций, но мы сосредоточимся сейчас на алгебраической стороне вопроса и не будем это пространство уточнять. Может быть, самым простым примером таких преобразований служат классические косинус- и синус-преобразования Фурье. Если оба преобразования применимы к сдвинутым дельта-функциям Дирака по x и по k, то из (20), (21) получим еще две формулы

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x,k)\psi(t,k)\,\mathrm{d}k = \delta(x-t), \tag{22}$$

$$\int\limits_0^l \psi(s,k)\varphi(s,k')\,\mathrm{d}s = \delta(k-k'). \tag{23}$$

В модельной задаче, при $q=0$, $l=\infty$, очевидно, $\varphi = \cos kx + \dfrac{\sin kx}{k}\theta(k)$. Если $\varphi(x)$ ограничена на бесконечности (это можно выразить формально краевым условием $\varphi(\infty,k)=0$ в смысле обобщенных функций), то комплексных точек в спектре не будет. Решим уравнение (20), обозначая в нем $g=\widehat{f}$. Классическое обратное косинус-преобразование можно определить формулой

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos kx \cos kt\,\mathrm{d}k = \delta(x-t).$$

Проинтегрировав ее, получим

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin kx}{k}\cos kt\,\mathrm{d}k = H(x-t)$$

(подразумевается, что x и t положительны в этих формулах). Применим к (20) это преобразование

$$\widetilde{g}\,(t) = f(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty f(x)\int\limits_0^x (\,\widetilde{\theta}\,(t+s) + \widetilde{\theta}\,(t-s))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

К счастью, решать это интегральное уравнение нам не потребуется. Если θ постоянна, имеем вместо (24): $\widetilde{g}\,(t) = f(t) + \dfrac{1}{2}\int\limits_t^\infty f(x)\theta\,\mathrm{d}x$. Продифференцировав и решив, найдем:

$$f(t) = \int\limits_0^\infty g(k)\left(\cos kx + \int\limits_0^x \cos ks\,\theta\,\mathbf{e}^{(x-s)\theta}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}k. \qquad (25)$$

Внутренний интеграл очевидно берется, кроме того $\mathbf{e}^{x\theta} \equiv \mathbf{e}^{x\theta_1}C_1 + \mathbf{e}^{x\theta_2}C_2$, где $\theta_\star$ – различные собственные числа матрицы θ. В итоге снова получится комбинация $\cos kx$ и $\sin kx$. Следовательно [16], эти преобразования применимы ко всем обобщенным функциям медленного роста с носителями на положительной полуоси.

Дальнейшее исследование этого вопроса отложим до определения матрицы θ.

Теория этих преобразований постепенно развивается [10, 11, 17]. Исследований матричных W-преобразований автор пока не нашел.

3.2. Применение W-преобразования к задаче Штурма–Лиувилля

Далее будем рассматривать сразу две задачи Штурма–Лиувилля (17), (18), (19): будем называть их *задача 1* и *задача 2.* Хотя потенциал второй задачи окажется равным нулю, следуя традиции [14, 18, 19], до времени не будем этим пользоваться. Различать атрибуты задач будем с помощью индексов 1 и 2. Применим к решению φ_1 уравнения (17) *задачи 1* обратное преобразование *задачи 2.* Обратное преобразование берется потому, что прямое к уравнениям с переменными коэффициентами применить трудно. Подчеркнем, что функция φ_1 – не собственная, выберем ее асимптотически совпадающей при $k \to \infty$ с φ_2. Тогда, согласно (22),

$$\int \varphi_1(x,k)\,\psi_2(t,k)\,\mathrm{d}k = \delta(x-t) + K(x,t), \qquad (26)$$

с регулярной функцией $K(x,t)$. Применив теперь прямое преобразование от t к k, получим $\varphi_1(x,k) = \varphi_2(x,k) + \int K(x,t)\,\varphi_2(t,k)\,\mathrm{d}t$. Таким образом, решения задач можно связать интегральным оператором второго рода, с ядром K от k не зависящим. Теперь этот оператор желательно выбрать попроще. Если потенциалы совпадают, ядро можно взять нулевым. В более общем случае, как будет видно, его можно взять вольтерровым, т. е. с ядром под или над диагональю в квадранте x, t. Мы возьмем над диагональю, итак:

$$\varphi_1(x,k) = \varphi_2(x,k) + \int\limits_x^l K(x,t)\,\varphi_2(t,k)\,\mathrm{d}t. \tag{27}$$

Это ядро $K(x,t)$ теперь будет новой неизвестной в задаче Штурма–Лиувилля вместо φ_1. На нее нужно пересчитать все условия.

Вспомним (16), что данные рассеяния – это значение в точке $x = 0$ невырожденного решения $y = \varphi_1(0,k)$ *задачи 1* с условием (17), (18), но не обязательно (19). Последнему условию $\varphi_1(x,k)$ удовлетворяет только в точках спектра первой задачи.

3.3. Уравнения для первой новой неизвестной K

Пусть три матричные функции двух переменных связаны формулой

$$R(x,t) = K(x,t) + F(x,t) + \int\limits_x^l K(x,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s. \tag{28}$$

Далее их аргументы без нужды выписываться не будут. Определим три даламбертиана:

$$\begin{aligned} &\Box = \partial_x^2 - \partial_t^2,\\ &\Box_1 K = \Box K + R_1(x)\,K - K\,R_2(t),\\ &\Box_2 F = \Box F + S_1(x)\,F - F\,S_2(t), \end{aligned} \tag{29}$$

где $R_\star$, $S_\star$ – матричные функции одной переменной.

Предложение 1 . *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned} &\int\limits_x^l \Box_1[K](x,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s + \int\limits_x^l K(x,s)\,\Box_2[F](s,t)\,\mathrm{d}s +\\ &+\Box_1(K-R) + \Box_2 F - (2(K(x,x))_x + S_1(x) - R_1(x))\,F +\\ &+(K-R)\,(R_2(t) - S_2(t)) + \int\limits_x^l K(x,s)\,(R_2(s) - S_1(s))\,F(s,t)\,\mathrm{d}s -\\ &-K(x,l)\,F_{,x}(l,t) + K_{,t}(x,l)\,F(l,t) \equiv 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Применим оператор $\Box$ к (28):

$$\Box R = \Box K + \Box F + \int_x^l K_{,xx}(x,s)\, F(s,t)\,\mathrm{d}s - \int_x^l K(x,s)\, F_{,tt}(s,t)\,\mathrm{d}s -$$
$$-(K(x,x))_{,x}\, F - K(x,x)\, F_{,x} - K_{,x}(x,x)\, F. \tag{31}$$

Первый из интегралов I_1 преобразуем к виду:

$$I_1 = \int_x^l \Box[K](x,s)\, F(s,t)\,\mathrm{d}s + \int_x^l K(x,s)\, F_{,ss}(s,t)\,\mathrm{d}s + K_{,t}(x,l)\, F(l,t) -$$
$$-K_{,t}(x,x)\, F - K(x,l)\, F_{,x}(l,t) + K(x,x)\, F_{,x}. \tag{32}$$

Соединив (31) и (32), получим

$$\Box R = \int_x^l \Box[K](x,s)\, F(s,t)\,\mathrm{d}s + \int_x^l K(x,s)\, \Box[F](s,t)\,\mathrm{d}s + \Box K +$$
$$+\Box F - 2(K(x,x))_x\, F + K_{,t}(x,l)\, F(l,t) - K(x,l)\, F_{,x}(l,t). \tag{33}$$

Если теперь выразить в (33) $\Box$ через $\Box_1$ и $\Box_2$ из формул (29), то получится искомое тождество – вариант формулы Грина. Оно позволяет избежать повторений в вычислениях. Приблизим его к нашим задачам, положим в нем $R_2 = S_1 = q_2$, $R_1 = q_1$:

$$\int_x^l \Box_1[K](x,s)\, F(s,t)\,\mathrm{d}s + \int_x^l K(x,s)\, \Box_2[F](s,t)\,\mathrm{d}s + \Box_1(K-R) +$$
$$+\Box_2 F - (2(K(x,x))_x + q_2(x) - q_1(x))\, F - K(x,l)\, F_{,x}(l,t) +$$
$$+K_{,t}(x,l)\, F(l,t) + (K-R)\,(q_2(t) - S_2(t)) \equiv 0 \tag{34}$$

Предложение 2. *Пусть $l_2 = \infty$, потенциалы $q_\star$ быстро убывают на бесконечности, $K(x,t)$ – функция с носителем в множестве $0 \le x \le t$, подчиненная уравнениям*

$$K_{,xx} - K_{,tt} + q_1(x)\, K - K\, q_2(t) = 0, \tag{35}$$
$$2(K(x,x))_{,x} + q_2(x) - q_1(x) = 0, \tag{36}$$
$$K(x,\infty) = 0, \qquad K_{,t}(x,\infty) = 0 \tag{37}$$

и абсолютно интегрируемая по t при всех x. Тогда для любого решения уравнения $P_2\varphi_2 = 0$ функция φ_1, определенная равенством (27), будет решением уравнения $P_1\varphi_1 = 0$ при $x \le l_1$.

Значения функций в ∞ понимаются как пределы. Рассмотреть требуется всего два решения φ_2: $\sin kx$ и $\cos kx$ на бесконечности, поскольку остальные будут их линейными комбинациями. В тождестве (34) положим $F = \varphi_2(x,k)$, $S_2 = 0$, $R = \varphi_1(x,k)$ и устремим l в бесконечность по нулям подходящей функции: $\sin kx$, либо $\cos kx$. Функция φ_2 на этих нулях стремится к нулю. В пределе тождество превратится в $\Box_1(\varphi_1) + \varphi_1\, q_2(t) = P_1\varphi_1 = 0$, что и требуется. Очевидно, необходимо убедиться, что на функцию K наложено не слишком много условий. То есть, во-первых, что при заданных потенциалах она может быть найдена и, во-вторых, что среди этих функций K окажется та, которая определит исходный потенциал q_1 по формуле (36).

Заметим, что если K определена формулой (26), то (35) и (37) следуют из нее непосредственно, а (36) выводится из (34) тем же рассуждением, что приведено в доказательстве.

Предложение 3. *Предположим, что потенциалы задач убывают на бесконечности, а* задача 2 *имеет формулу обращения. Тогда существует функция K, подчиняющаяся условиям Предложения 2.*

Докажем этот ключевой в схеме рассуждений результат в предположении, что $q_2 = 0$. Нам для решения сейсмологической задачи большего не требуется, а общий случай, по-существу, не сложнее этого частного. Разделим переменные в задаче, поскольку уравнение (35) кажется подходящим для этого. Согласно принципам этой процедуры, нужно границы, на которых заданы условия, сделать линиями уровня новых координат, а сами условия на этих границах сделать однородными. Эта задача решается введением координаты $s = t - x$ вместо t и неизвестной $M(x,s) = K(x, x+s) - q_1(x)\,\mathrm{e}^{-s}$, для которой получаем задачу в первом квадранте

$$M_{,xx} - 2M_{,xs} = -q_1(x)\,M + r(x)\,\mathrm{e}^{-s}, \tag{38}$$

$$M(x,0) = 0, \tag{39}$$

$$M(x,\infty) = 0, \qquad M_s(x,\infty) = 0, \tag{40}$$

$$M(\infty,s) = 0. \tag{41}$$

Здесь r – быстро убывающий потенциал, полученный из q_1 при замене неизвестной, а четвертое условие возникло потому, что если $x \to \infty$, то и $t \to \infty$. Применим к уравнению (38) преобразование фурье по s, считая функции сосредоточенными в первом квадранте,

$$\widehat{M}_{,xx} + 2\,\mathrm{i}\xi\,\widehat{M}_{,x} = -q_1(x)\,\widehat{M} + \frac{r(x)}{1 + \mathrm{i}\xi}.$$

Это уравнение получено из двух уравнений (38) и (39) и оно им (сразу двум) эквивалентно в пространстве обычных функций M. Условие (41) переносится на $\widehat{M}$ без изменения, а (40) эквивалентно гладкости $\widehat{M}$ по ξ (чем глаже, тем быстрее убывание [16]). Учтя все это, получим для $\widehat{M}$ интегральное уравнение

$$\widehat{M} = \int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{2\,\mathrm{i}\xi t} \int\limits_{x+t}^\infty q_1(y)\, \widehat{M}\,(y,\xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t + \frac{1}{1+\mathrm{i}\xi}\int\limits_0^\infty \mathbf{e}^{2\,\mathrm{i}\xi t} r_1(x+t)\,\mathrm{d}t, \qquad (42)$$

где $r_1' = r$, $r_1(\infty) = 0$. Из убывания на бесконечности функций q_1 и r_1 следует, что при достаточно большом x уравнение становится вольтерровым. Отсюда сразу следует единственность, так как на меньшие значения x решение обыкновенного уравнения продолжается единственным образом. Гладкость очевидна. Остается доказать, что $\widehat{M}$ сохраняет интегрируемую асимптотику по ξ (чтобы M была обычной, а не обобщенной функцией). Чтобы это сделать, достаточно доказать вольтерровость уравнения (42) при больших ξ. Изменив порядок интегрирования и вычислив интеграл по t, получим, что ядро в интеграле от $\widehat{M}$ равно

$$\frac{\mathbf{e}^{2\,\mathrm{i}\xi(y-x)}-1}{2\,\mathrm{i}\xi}q(y)H(y-x).$$

Так как свободный член в (42) оценивается величиной $\dfrac{C}{1+|\xi|^2}$, то такая же оценка будет справедлива и для $\widehat{M}$. Из этой же оценки вытекает и асимптотика производной. Ясно также, вместо $\mathbf{e}^{-s}$ следовало взять функцию $\mathbf{e}^{-s^2}$ в (38), сомнений стало бы меньше.

Замечание. Для скалярного уравнения, конечного l (что более существенно, чем скалярность) в ситуации, когда носитель K лежит под диагональю ($x \geq t$), теорема существования и единственности аналогичной краевой задачи доказана в [14]. Наш случай сложнее из-за особенности на бесконечности дифференциального уравнения (35). Б. М. Левитан и И. С. Саргсян переменных не разделяют, а пользуются формулой Даламбера, которая в нашей ситуации может быть записана так:

$$M(x,s) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^s r_1\left(\frac{2x+s-t}{2}\right)\,\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\limits_0^s \int\limits_{(2x+s-t)/2}^\infty q_1(y)\,M(y,t)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t.$$

Аналогично вышесказанному, можно сначала найти единственное решение при $x \geq a$. Согласно теории гиперболических уравнений, оно однозначно продолжается в область $2x+s \geq a$. Тут нужно показать, что продолжение убывает по s. Наконец, решение продолжается в оставшийся треугольник $2x + s \leq a$ первого квадранта (постепенно уменьшая a путем построения локального решения в окрестности угла $s = 0$ $x = a$).

Можно, наконец, попробовать найти K из формулы (26), ее определяющей. Тогда равенства (35), (36), (37) будут выполнены и задача будет состоять в том, чтобы K обращалась в нуль при $t < x$. В множестве функций φ_1, асимптотически эквивалентных φ_2, требуется выбрать (единственную?) подходящую.

3.4. Уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко

Обратимся к обратной задаче. Матрица q_1 теперь неизвестна, но требуется удовлетворить данным рассеяния. Так как q_1 просто выражается через значения K на диагонали (36), можно подставить ее в (35) и тогда получится нелинейная система Даламбера для K с краевыми условиями – данными рассеяния. Исследовать эту возможность мы здесь не будем, а, следуя за изобретателями этого метода, линеаризуем задачу, заменив переменную K на F.

Предложение 4. *Пусть $l_2 = \infty$, потенциал q_2 быстро убывает на бесконечности, а F – решение уравнения Даламбера*

$$\Box F + q_2(x)\, F - F\, q_2(t) = 0, \tag{43}$$

определенное в первом квадранте (т. е. при $x \geq 0$, $y \geq 0$) и так убывающее на бесконечности

$$F(x,\infty) = 0, \qquad F(\infty,t) = 0, \qquad F_{,x}(\infty,t) = 0, \tag{44}$$

чтобы уравнение Гельфанда–Левитана–Марченко

$$K(x,t) + F(x,t) + \int\limits_x^\infty K(x,s)\, F(s,t)\, \mathrm{d}s = 0 \tag{45}$$

было однозначно разрешимо при $x \leq t$ относительно функции K. Тогда, если K – решение (45), а q_1 определяется из (36), то K удовлетворяет уравнениям (35) и (37).

Из условий (44) и (37) следует предельное соотношение

$$K(x,\infty)\, F_{,x}(\infty,t) - K_{,t}(x,\infty)\, F(\infty,t) = 0, \tag{46}$$

Тогда, положим в тождестве (34): $R = 0$, $S_2 = q_2$, $l = \infty$. Оно превратится в $\Box_1 K + \int\limits_x^\infty \Box_1[K](x,s)\, F(s,t)\,\mathrm{d}s = 0$, откуда следует, ввиду однозначной разрешимости, что $\Box_1 K = 0$, т. е. (35) (в самом деле, уравнение для $\Box_1 K$ – это однородная часть уравнения (45)). Убывание K на бесконечности следует из (45).

Итак обратная задача линеаризована. Для ее решения потенциал q_2 будет выбран равным нулю. Конечно, следовало бы убедиться, что такой выбор не приведет к исключению из рассмотрения каких-либо возможных потенциалов q_1. Иными словами, в дополнение к предложению (3) хотелось бы иметь примерно такой результат. Пусть потенциал q_1 задан и быстро убывает, $q_2 = 0$. Тогда в первом квадранте можно найти решение $F(x,t)$ уравнения Даламбера (43), убывающее на бесконечности, такое, что найденная из уравнения (45) функция $K(x,t)$ будет удовлетворять уравнениям (35), (36), (37) и (46). Таким образом, если q_1 и K известны, уравнения для F линейны. Здесь эту задачу мы решать не будем.

Замечание. Кроме трех авторов, уже много раз названных, в разработке методов восстановления деятельное участие принимал М.Г. Крейн, который, по словам Б.М. Левитана и И.С. Саргсяна [14], "разработал оригинальный метод для решения обратных задач". Мне не удалось выяснить, в чем этот метод заключается. Сам М.Г., напротив, пишет: "На важную роль переходной функции в обратных краевых задачах мы указали еще в (1,2). После этого ею весьма успешно воспользовались для изучения обратной краевой задачи И.М. Гельфанд и Б.М. Левитан" [21]. Возможно, время для следования по его пути еще не наступило.

3.5. Данные рассеяния в новых координатах

Рассмотрим, наконец, (см. абзац после формулы (27)) как записываются данные рассеяния

$$\varphi_1(0,k), \qquad \varphi_1'(0,k) = \theta_1 \varphi_1(0,k)$$

для переменной K, а затем и для F. Предположим, что вторая задача Штурма–Лиувилля имеет формулу обращения, $l_2 = \infty$. Тогда из (27) следует:

$$K(x,t) = \int\limits_0^\infty (\varphi_1(x,k) - \varphi_2(x,k))\psi_2(t,k)\,\mathrm{d}k. \tag{47}$$

Положив $x=0$ в этой формуле и в ее производной по x, получим функции $K(0,t)$, $K_{,x}(0,t)$ в качестве данных рассеяния. Чтобы решить обратную задачу, нужно найти матрицу $K(x,t)$ с этими краевыми условиями. Она должна удовлетворять условиям Предложения 2, в которых q_1 считается неизвестной. Преобразуем эти данные с помощью краевого условия (18). Положим $\theta_\star = \zeta_\star + k^2\eta_\star$ с постоянными матрицами ζ, η из (14), тогда, дифференцируя формулу (47), получаем:

$$K_{,x}(0,t) = \int\limits_0^\infty (\theta_1\varphi_1(0,k) - \theta_2\varphi_2(0,k))\psi_2(t,k)\,\mathrm{d}k =$$

$$= \zeta_1 K(0,t) + \eta_1 \int\limits_0^\infty k^2(\varphi_1(0,k) - \varphi_2(0,k))\psi_2(t,k)\,\mathrm{d}k +$$

$$+ (\zeta_1 - \zeta_2)\int\limits_0^\infty \varphi_2(0,k))\psi_2(t,k)\,\mathrm{d}k + (\eta_1 - \eta_2)\int\limits_0^\infty k^2\varphi_2(0,k))\psi_2(t,k)\,\mathrm{d}k.$$

Два последних интеграла в этой сумме – обобщенные функции, чтобы обратить их в нуль, положим $\theta_2 = \theta_1$. В итоге

$$K_{,x}(0,t) = \zeta K(0,t) + \eta G(t) \tag{48}$$

с постоянными матрицами $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & 0 \end{pmatrix}$, где $\zeta_{12}\zeta_{21} \neq 0$, $\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и убывающей (см. (37)) матрицей G (представляющий ее интеграл убывает, так как множитель k^2 сглаживает скачок в нуле, а на бесконечности разность в интеграле быстро убывает, скорость убывания зависит от гладкости и убывания на бесконечности потенциалов).

Обратно, если данные рассеяния $K(0,t)$ заданы и выполнено равенство (48), то по формуле (27) вычисляется $\varphi_1(0,k)$, а из (48) следует, что W_2-преобразование от $\varphi_{1,x}(0,k) - \varphi_{2,x}(0,k) - \theta(\varphi_1(0,k) - \varphi_2(0,k))$ равно нулю. Следовательно, φ_1 подчиняется граничному условию (18) и, значит, между данными рассеяния в координатах φ и K соблюдается полное соответствие.

Очевидно, чтобы записать данные рассеяния для матрицы F, нужно просто подставить $x=0$ в уравнение (45) и его производную, получатся два уравнения для F:

$$K(0,t) + F(0,t) + \int\limits_0^\infty K(0,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s = 0, \tag{49}$$

$$K_{,x}(0,t) + F_{,x}(0,t) - K(0,0)\,F(0,t) + \int\limits_0^\infty K_{,x}(0,s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s = 0. \qquad (50)$$

Из однозначной разрешимости уравнения (45) вытекает эквивалентность этих равенств данным рассеяния для K. Пользуясь (48), перепишем уравнение (50) в виде

$$F_{,x}(0,t) - (\zeta + K(0,0))\,F(0,t) + \eta\left(G(t) + \int\limits_0^\infty G(s)\,F(s,t)\,\mathrm{d}s\right) = 0. \qquad (51)$$

3.6. Решение обратной задачи

Рассмотрим случай полупространства: $l_1 = \infty$. Обратная задача для F состоит из уравнений (43), (44), (49) и (51). Решим ее, полагая $q_2 = 0$ и, следовательно, $F(x,t) = U(t+x) + V(t-x)$. Требуется найти функции U, V и формулу обращения для второй задачи. Области определения у функций U и V различны, поэтому для удобства введем функцию W на полуоси: $W(x) = V(-x)$, $x \geq 0$, с условием $W(0) = V(0)$ производная V в нуле, видимо, может и рваться. Обозначим для краткости $A(t) = K(0,t)$ и подставим F в (49) и (51):

$$U(t) + V(t) + \int\limits_t^\infty A(s-t)\,U(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^t A(t-s)\,V(s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int\limits_0^\infty A(t+s)\,W(s)\,\mathrm{d}s = -A(t),$$

$$U'(t) - V'(t) - (\zeta + A(0))(U(t) + V(t)) + \eta\left(G(t) + \int\limits_t^\infty G(s-t)\,U(s)\,\mathrm{d}s +\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t G(t-s)\,V(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_0^\infty G(t+s)\,W(s)\,\mathrm{d}s\right) = 0.$$

Неожиданно все интегралы оказались свертками. Так как функции определены на полуоси, применяем преобразование Лапласа:

$$\widehat{U} + \widehat{V} + \widehat{A(-t)}\,\widehat{U} + \widehat{A}\,\widehat{V} + \widehat{A}\,\widehat{W}(-p) = -\widehat{A}, \qquad (52)$$

$$p\,\widehat{U} - p\,\widehat{V} - (\zeta + A(0))(\widehat{U} + \widehat{V}) +$$

$$+ \eta(\widehat{G} + \widehat{G(-t)}\,\widehat{U} + \widehat{G}\,\widehat{V} + \widehat{A}\,\widehat{W}(-p)) = U(0) - V(0). \qquad (53)$$

Неуказанный аргумент у всех функций – комплексное число $p = p_1 + \mathrm{i}p_2$ из правой полуплоскости. Функция $\widehat{W}(p)$ определена во всей комплексной плоскости, в уравнениях участвует лишь ее ограничение на левую полуплоскость. Это лишняя неизвестная.

3.6.1. Обсуждение достигнутого результата. Исследование этой системы – отдельный вопрос, мы ограничимся лишь несколькими словами.

Определитель ее относительно переменных $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ на бесконечности равен p^2 (так как матрицы двумерны; в скалярном случае он, естественно, равен p), а присоединенная матрица эквивалентна постоянной: в самом деле, можно из уравнения (52) выразить $\widehat{U}$ и подставить в (53). Тогда $\widehat{V}$ будет иметь множитель p в главной части. Выразить непосредственно $\widehat{V}$ из полученного уравнения нельзя, так как правая часть зависит от $\widehat{V}$ через W и V. Но и интегрального уравнения решать не придется, потому что можно воспользоваться следующим приемом. Если заменить $V(0)$ на неизвестную постоянную матрицу V_0, то $\widehat{V}$ явно выразится в виде линейной функции от V_0 и $\widehat{W}$ с условием, что $W(0) = 0$. После обращения преобразования Лапласа определение постоянных сведется к числовой линейной системе уравнений с правой частью, зависящей от W. Очень быстро убывающая на бесконечности функция W остается параметром системы. Определитель имеет только конечное число нулей, которые для $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ обернутся полюсами. Одно из обратных преобразований Лапласа задается интегралом по вертикальной прямой при большом p_1. Можно сдвинуть контур на мнимую ось, тогда интеграл превратится в обратное преобразование Фурье от быстро убывающей функции. Но добавятся вычеты в полюсах. Они соответствуют волнам Лява и Рэлея (смотря по тому, какой матричный блок из распавшейся трехмерной задачи рассматривается – одномерный или двумерный) и имеют вид $C\,x^n\,\mathbf{e}^{a\,x}$, согласно формуле $\widehat{x^n\,\mathbf{e}^{a\,x}}\,(p) = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$. Ясно, что физический смысл при $x \geq 0$ будут иметь только волны с $\mathbf{Re}\,a < 0$.

Спрашивается, на что можно употребить функцию W? Можно ли, с ее помощью избавиться от нефизических полюсов? Или же получить гарантированно сейсмологическое решение? Дело в том, что потенциал имеет симметрию, след матрицы V оператора P_3 из (12) равен нулю. Но ведь если даже этого добиться, до восстановления исходного потенциала будет еще далеко. Во-первых, есть еще одна симметрия – соотношение (10) между ρ и μ, в котором q стало известно из решения обратной задачи для уравнения Лява. Во-вторых, оба решения не должны зависеть ни от направления плоской волны α (см. (4)), ни от выбора оси, относительно поворотов вокруг которой инвариантна компонента в разложении исходной сейсмической волны. Ведь можно параллельно решить обе обратные задачи Лява и Рэлея, для двух альтернативных способов разделения переменных, а результаты должны совпадать. И не зависеть, наконец, еще и от частоты. Симметрия V в [8] пересчитывается в условие на данные рассеяния. Хорошо бы дойти по этому пути до конца: сформулировать такие условия на эти данные, чтобы восстанавливался не какой-нибудь, а исходный потенциал. Именно так эта проблема ставилась изначально [14, 18, 19]. В классическом случае имеются теоремы [18] об однозначности восстановления потенциала по спектральной функции. Бывает, что их требуется больше одной [14]. Мы же (и [8]) по заданной волне на поверхности находим потенциал, среди волн которого имеется и исходная. Очевидно, тех минимальных условий на данные рассеяния, которые обеспечивают разрешимость всех задач, которые нужно решить в цепочке (сейсмограмма $\longrightarrow$ потенциал $\longrightarrow$ сейсмограмма) недостаточно. Иначе была бы справедлива абсурдная "теорема", что всякое волновое поле выносит на поверхность всю информацию об упругих свойствах в глубине. Не исключено, конечно, что существуют среды (какие-нибудь поглощающие или с волноводами) вообще невосстановимые по сейсмограммам.

Конечно, было бы интересно рассмотреть пример, в котором все эти операции и функции были представлены квадратурами. Но это не просто. В целой книге [14] нет такого примера, даже скалярного уравнения Штурма–Лиувилля. С убывающими потенциалами их, вероятно, нет в природе, во всяком случае в [22] нет ни одного. Может быть, однородный шар, полуплоскость? Но мы видели, что к убывающему потенциалу дело здесь не сводится, надо разбираться, что получится, скорее всего, статья – в половину этой (пример тому [23] – однородная полуплоскость!).

3.6.2. Формула обращения W_2-преобразования. Требуется решить уравнение (20), которое в этом случае имеет вид

$$\int\limits_0^\infty f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^\infty f(x)\frac{\sin kx}{k}(\zeta + k^2\eta)\,\mathrm{d}x = g(k).$$

Присоединяя к формулам конца параграфа (3.1) еще одну,

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty k\sin kx\cos kt\,\mathrm{d}k = -\delta'(x-t),$$

получим из него cos-преобразованием Фурье:

$$f(t) + \int_t^{\infty} f(x)\zeta \,\mathrm{d}x + f'(t)\eta = \widehat{g}\,(t).$$

После дифференцирования, имеем:

$$f'(t) - f(t)\zeta + f''(t)\eta = \widehat{g}\,'(t). \tag{54}$$

Вспомнив вид матрицы $\theta = \zeta + k^2\eta$ (14), выпишем характеристическое уравнение

$$(1 + \zeta_{12}\,\eta_{21})p^2 - \zeta_{11}\,p - \zeta_{12}\,\zeta_{21} = 0.$$

Посмотрев еще раз на формулу (14), можно увидеть, что в физически приемлемых случаях (на первый взгляд, разумеется) с корнями этого уравнения может случиться что угодно. Их может не быть совсем, может быть один вещественный, кратный, два любых, наконец, их может быть слишком много, все коэффициенты многочлена могут обратиться в нуль. Во всех этих случаях, кроме последнего, уравнение (54) имеет столь же быстро убывающее на бесконечности решение, как его правая часть (можно воспользоваться результатами [24]). Если однородная часть уравнения (54) имеет среди решений быстро убывающие экспоненты, то обратное W_2-преобразование определится неоднозначно. Для его фиксирования нужно как угодно выбрать значения одной или двух констант. Что это значит и можно ли этим воспользоваться – остается вопросом. Для случая волн Лява (скалярного уравнения и $\eta = 0$) формула обращения (25) уже была получена.

3.6.3. Обратная задача на конечном отрезке полупространства. Можно положить $l_2 = l_1$ и повторить с вариацией то, что было только что сказано. Мы же совсем кратко рассмотрим идею сведения конечной задачи к бесконечной. Положим $l = l_1$, $l_2 = \infty$. На конце отрезка $x = l$ должны быть заданы какие-то условия – например, его, как и начало, можно считать свободным. Идея основана на простом наблюдении, что функция φ_1 в (27) не зависит от значений $K(x,t)$ при $x > l$. Благодаря этому, достаточно естественно возникают две задачи на полупрямой, совместное решение которых дает решение на отрезке.

Положим $K_1 = K$ при $0 \le x \le l$ и $K_2 = K$ при $l \le x$, то же самое сделаем с F. Тогда уравнение (45) разобьется на два:

$$K_1(x,t) + F_1(x,t) + \int_x^{l} K_1(x,s)\,F_1(s,t)\,\mathrm{d}s + \int_l^{\infty} K_1(x,s)\,F_2(s,t)\,\mathrm{d}s = 0,$$

$$K_2(x,t) + F_2(x,t) + \int\limits_x^\infty K_2(x,s)\, F_2(s,t)\, \mathrm{d}s = 0.$$

Ясно, что если найти непрерывную F, части K последовательно найдутся и склеятся. Остается записать для частей F данные рассеяния и применить преобразование Лапласа к сверточному уравнению.

Заключение

Наша логика решения прямой и обратной задачи довольно примитивна. Без счета применяются обобщенные преобразования Фурье–Лапласа и лишь в одном месте, когда результат очередного преобразования нелинеен, его линеаризуют уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко. Очевидно, эта процедура требует исследования. Слабейшим звеном кажется чередование прямых и обратных W-преобразований. Почему не взять их композицию? Чем она будет? Не легче ли ее обращать? Следовательно, желанный идеал еще не достигнут (см. Введение).

И кроме логики есть много проблем, они отмечались в тексте, главная из них – найти условие на сейсмограммы, которое обеспечивает единственность упругих свойств и плотности среды. Решение этого вопроса может повлечь за собой радикальный пересмотр некоторых простых решений, которые принимались, исходя из упрощенной традиционной постановки задачи – найти среду, в которой существует заданная трансформанта волны. Из прочих отметим один. В работе [8] построение потенциала начинается с характеристического уравнения, в качестве которого берется одна из функций Вейля, приравненная к бесконечности, так что характеристические корни – это полюса функции Вейля. Совпадают ли эти числа с корнями нашего характеристического уравнения?

Наша схема решения обратной задачи для волны Лява в точности повторяет один из классических алгоритмов для уравнения Штурма–Лиувилля. Там имеются теоремы единственности. В работах, представленных статьями [6–8], содержится надежда (не каждый раз и сформулированная), что какие-то аналоги этих теорем будут справедливы в сейсмологической ситуации. Отсюда стремление – достичь результата с минимумом затрат. Монохроматические установившиеся колебания поверхности позволяют найти среду, в которой они могут иметь место. Почему не взять несколько частот допустимого диапазона? Но зачем брать несколько, когда одной достаточно? Волны Рэлея порождаются одним вибратором, волны Лява – другим, крутильным. Алгоритмы восстанавливают среду безальтернативно. Но это не страшно, когда она единственна. Задача сравнения решений обратных задач Лява и Рэлея рассматривалась лишь как критерий правильности обоих решений. Вопрос о совместном их решении просто не поднимался, потому что до программ была доведена лишь задача Лява, так что не только решать совместно, но и сравнивать было нечего. Работали над задачей Рэлея. В качестве примера мы тоже решили такую задачу. Решение оказалось обескураживающе многозначным. Но и правильную корректную задачу, хотя и в самых общих чертах, нам, кажется, удалось поставить. Ее характерная черта – избыточность сейсмологических данных. Имеется в виду, что выбранный участок среды просвечивается сейсмическими волнами самого разного характера, с разными скоростями и в течении длительного срока. Можно и нужно, и есть для этого средство, учесть все это многообразие целиком в решении одной обратной задачи. Обнаруженая "лишняя" функция W, возможно, имеет к этой избыточности отношение. Разумеется, такая постановка вопроса не запрещает искать условия на среду и на "монохроматические установившиеся колебания", при выполнении которых регистрации на поверхности одних этих колебаний окажется достаточно для однозначного восстановления среды.

Автор благодарен Б.Г. Букчину, который выправил сейсмологическую часть статьи, за плодотворное внимание к этой тематике, и В.П. Паламодову за внимание к работе и полезные и крайне интересные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов А. Н.* Об особенностях в обратной сейсмологической задаче // Анализ геодинамических и сейсмических процессов. М.: ГЕОС, 2004. С.267–277. (Вычисл. сейсмология; Вып.35).
2. *Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т.1. М.: Мир, 1983. 520 с.
3. *Левшин А.Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М.: Наука, 1973. 176 с.
4. *Кузнецов А. Н.* Функция Лагранжа и разделение переменных для упругих колебаний в осесимметричной слоистой среде // Теоретические проблемы геодинамики и сейсмологии. М.: Наука, 1994. С.171–189. (Вычисл. сейсмология; Вып.27).
5. *Киселев С. Г., Кузнецов А. Н., Маркушевич В. М., Цемахман А. С.* Разложение на множители и форма Штурма–Лиувилля уравнений для P–SV-колебаний слоистых сред // Теоретические проблемы в геофизике. М.: Наука, 1997. С.44–69. (Вычисл. сейсмология; Вып.29).
6. *Маркушевич В. М., Хенкин Г. М.* Явные формулы для восстановления упругих параметров полупространства по поверхностным волнам Рэлея // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.167–174. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).

7. *Новикова Н. Н., Хенкин Г. М.* О восстановлении оператора Штурма–Лиувилля по характеристикам дискретного спектра // Численное моделирование и анализ геофизических процессов. М.: Наука, 1987. С.174–184. (Вычисл. сейсмология; Вып.20).
8. *Beals R., Henkin G.M., Novikova N.N.* The inverse boundary problem for the Rayleigh system // J. Math. Phys. 1995. Vol.36. N 12. P.6688–6708.
9. *Кузнецов А. Н.* Обратная кинематическая задача для двумерной радиально-однородной среды // Компьютерный анализ геофизических полей. М.: Наука, 1990. С.205–212. (Вычисл. сейсмология; Вып.23).
10. *Weyl H.* Über gewönliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Annalen. 1910. Vol.68. P.220–269.
11. *Malgrange B.* Équations de Sturm-Liouville // Séminaire Bourbaki, Vol.2, Exp. No. 65. Paris: Soc. Math. France, 1995. P.155–165.
12. *Маркушевич В. М., Резников Е. Л.* Исследование строения симметричной твердой среды по стоячим SH-волнам на поверхности // Теоретическая и вычислительная геофизика, N 2. М.: Междувед. геофиз. ком. 1974. С.5–34.
13. *Киселев С. Г., Маркушевич В. М.* Краевая задача Рэлея в матричной форме Штурма – Лиувилля // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.101–119. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
14. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988. 432 с.
15. *Romanov V. G., Cheng-I Weng, Tei-Chen Chen.* An inverse problem for a layered elastic plate // Appl. Math. and Comp. 2003. Vol.137. P.349–369.
16. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986. 464 с.
17. *Vu Kim Tuan, Cheng-I Weng, Tei-Chen Chen.* Paley – Wiener and Boas theorems for singular Sturm – Liouville integral transforms // Advances in Appl. Math. 2002. Vol.29. P.563–580.
18. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 330 с.
19. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984. 238 с.
20. *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985. 472 с.
21. *Крейн М. Г.* Об обратных задачах для неоднородной струны. ДАНСССР. 1952. Т.82, N 5. С.669–672.
22. *Зайцев В. Ф. Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука-Физматлит. 1995. 560 с.
23. *Перегудов Д. В.* Двумерная задача Лэмба. Метод Каньяра // Проблемы динамики и сейсмичности Земли. М.: ГЕОС, 2000. С.120–137. (Вычисл. сейсмология; Вып.31).
24. *Кузнецов А. Н.* О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением // Функцион. анализ и его прил. 1989. Т.23, Вып. 4. С.63–74.